"Pour que la connaissance ait toute son efficacité, il faut maintenant que l'esprit se transforme. Il faut qu'il se transforme dans ses racines pour pouvoir assimiler dans ses bourgeons."

(Gaston Bachelard, *La philosophie du non.)*

# Capítulo 1

# Sucessões, Limites e Continuidade

## 1.1 Sucessões reais

"Este capítulo não começa com uma definição."

**Definição.**
Designa-se por sucessão real (mais simplesmente: sucessão) uma aplicação $u$ do conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ para o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$. A imagem de $n$ por $u$ é representada por $u(n)$ ou $u_n$. O contradomínio de uma sucessão também é designado por **conjunto dos termos da sucessão**. Representamo-lo por $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ou mais simplesmente $\{u_n\}$. Finalmente, em certos casos, também denotamos a sucessão $u$ por $(u_n)$.

**Exemplo 1.1** A sucessão $u$ definida por $u(n) = 2n - 1$ tem como contradomínio o subconjunto de $\mathbb{R}$ constituído pelos números ímpares.

**Exemplo 1.2** O conjunto dos termos da sucessão $v(n) = \frac{1}{n}$ é composto pelos inversos de números naturais. Assim $\{v_n\} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Observe que à medida que o valor $n$ aumenta, os valores $v(n)$ aproximam-se de zero.

Uma sucessão diz-se limitada quando o seu contradomínio (o conjunto dos seus termos) é um conjunto limitado de $\mathbb{R}$, isto é,

$$\exists M \in \mathbb{R} : \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq M \,. \tag{1.1}$$

A sucessão $v$ do exemplo 1.2 é limitada posto que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|\frac{1}{n}\right| \leq 1 \,.$$

A sucessão $u$ do mesmo exemplo não é limitada. Com efeito, qualquer que seja o valor $M$ considerado em (1.1), existem termos da sucessão tais que $|u(n)| > M$. Basta tomar um natural $n > (M+1)/2$ de modo que

$$u_n = 2n - 1 > M\,.$$

Uma sucessão diz-se **crescente** se e só se, para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \leq u_{n+1}\,. \tag{1.2}$$

Equivalentemente:

$$u_{n+1} - u_n \geq 0\,.$$

De modo semelhante, define-se sucessão decrescente aquela que verifica

$$u_n \geq u_{n+1}\,, \tag{1.3}$$

para $n \in \mathbb{N}$. Uma sucessão crescente ou decrescente diz-se monótona. As sucessões $u$ e $v$ dos Exemplos 1.1 e 1.2 são monótonas.

Importa reconhecer quando uma sucessão é **monótona a partir de certa ordem** i.e quando verifica (1.2) ou (1.3) para $n$ maior ou igual que um certo $p \in \mathbb{N}$. Veja-se o seguinte

**Exemplo 1.3** Considere a sucessão $w_n = \dfrac{1}{2n-5}$. Temos

$$w_1 > w_2 \quad \text{e} \quad w_2 < w_3\,,$$

pelo que a sucessão $w_n$ não é monótona. No entanto

$$w_{n+1} - w_n = \frac{1}{2(n+1)-5} - \frac{1}{2n-5} = -\frac{2}{(2n-3)(2n-5)}\,.$$

Observe que o último membro é negativo se admitir-mos que $n \geq 3$. Ou seja, a sucessão $w$ é monótona a partir da ordem 3.

Uma sucessão diz-se convergente quando verifica a seguinte propriedade:

$$\exists L \in \mathbb{R}: \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists p \in \mathbb{N}: \quad n > p \Rightarrow |u_n - L| < \epsilon\,, \tag{1.4}$$

ou alternativamente

$$\exists L \in \mathbb{R}: \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists p \in \mathbb{N}: \quad n > p \Rightarrow L - \epsilon < u_n < L + \epsilon\,.$$

Dizemos nesse caso que $u$ converge para $L$ ou que $L$ é limite de $u$. Notamos

$$u_n \to L \quad \text{ou} \quad \lim u_n = L\,.$$

A condição (1.4) traduz a noção que os termos $u_n$ da sucessão estabilizam no valor de $L$ quando $n$ toma valores grandes. De facto, podemos interpretá-la do seguinte modo:

*Um céptico quanto à convergência da sucessão $u_n = 1/n$ estabelece uma vizinhança $]-\epsilon, \epsilon[$ do suposto limite zero. Observa então que são em número finito os naturais $n$ para os quais $u_n$ não pertence à vizinhança. Desconfiado, repete o processo com uma vizinhança de raio $\epsilon'$ ainda mais pequeno. E observa novamente que são em número finito os objectos $n$ para as quais a imagem $1/n$ fica fora da nova vizinhança.*

Dito de outro modo: qualquer que seja a vizinhança $V$ em torno do limite de uma sucessão convergente, é finito o conjunto dos índices $n$ tais que $u_n \notin V$. Em linguagem simbólica:

$$\exists L \in \mathbb{R} : \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists p \in \mathbb{N} : |u_n - L| \geq \epsilon \;\Rightarrow\; n \leq p\,.$$

Repare que esta condição é equivalente a (1.4), i.e.

$$\exists L \in \mathbb{R} : \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists p \in \mathbb{N} : \quad n > p \Rightarrow |u_n - L| < \epsilon\,.$$

Obviamente, quanto menor fôr o raio da vizinhança, maior deverá ser o valor da ordem $p$. Ou seja, o valor de $p$ depende do valor $\epsilon$ do raio da vizinhança. Por exemplo, no caso da sucessão $v_n = \frac{1}{n}$, temos que para um dado $\epsilon$, um valor de $p$ para o qual é verificada a condição (1.4) com $L = 0$ é

$$p_\epsilon := \lfloor \epsilon^{-1} \rfloor + 1 > \epsilon^{-1}\,,$$

em que $\lfloor x \rfloor$, ou "parte inteira de $x$", designa o maior inteiro menor ou igual a $x$. Nesse caso, todo o natural $n$ tal que $n > p_\epsilon$ verifica

$$|v_n| = \frac{1}{n} < \frac{1}{p_\epsilon} < \frac{1}{\epsilon}\,.$$

**Exemplo** O Sultão Harum-al-Raschid, não estando convencido que a sucessão $v$ do Exemplo 1.2 esteja a aproximar-se de zero, desenha a vizinhança de raio $\frac{1}{1000}$ em torno da origem. Com deferência, para não irar o soberano, a bela Sherazade mostra-lhe que o termo de ordem 1001, assim como todos os que lhe sucedem, pertencem à vizinhança do soberano.

Os lemas seguintes registam propriedades simples das sucessões convergentes.

**Lema 1.1** *Uma sucessão convergente u possui um único limite.*

**Dem.** Vamos supor a existência de dois valores distintos $L_1$ e $L_2$ verificando (1.4). A distância entre eles é $d = |L_1 - L_2|$. As vizinhanças

$$V_1 = \left]L_1 - \frac{d}{3}, L_1 + \frac{d}{3}\right[ \quad \text{e} \quad V_2 = \left]L_2 - \frac{d}{3}, L_2 + \frac{d}{3}\right[$$

não se intersectam (pode fazer um esboço). Por hipótese de convergência, para $\epsilon = \frac{d}{3}$, existem naturais $p_1, p_2$ tais que

$$n > p_1 \Rightarrow u_n \in V_1 \quad \text{e} \quad n > p_2 \Rightarrow u_n \in V_2\,.$$

Assim, para $n > \max\{p_1, p_2\}$, temos $u_n \in V_1$ e $u_n \in V_2$. Será isto possível? ■

**Lema 1.2** *Uma sucessão convergente u é necessariamente limitada.*

**Dem.** Seja $u$ uma sucessão convergente para um limite $L$. De acordo com a propriedade (1.4), se tomar-mos $\epsilon = 1$, existe um natural $p$ tal que

$$n > p \quad \Rightarrow \quad |u_n - L| < 1\,,$$

o que implica, para $n > p$, $|u_n| < |L| + 1$.
Por outro lado, para $n \leq p$,

$$|u_n| \leq \max\{|u_1|, ..., |u_p|\} = M_p\,.$$

Assim, a propriedade (1.1) é verificada pela sucessão $u$ se considerar-mos $M = \max\{|L| + 1, M_p\}$. ■

Uma sucessão limitada pode não ser convergente. Considere por exemplo $w_n = (-1)^n$. No lema seguintes estabelecemos um critério suficiente para a convergência de uma sucessão.

**Lema 1.3** *Uma sucessão monótona e limitada u é necessariamente convergente.*

Antes de justificar-mos este lema, recordamos que uma sucessão $u$ diz-se monotóna quando a aplicação $u(n)$ é crescente ou decrescente em $\mathbb{N}$. Estabelecemos também a noção de **supremo** e **infímo** de um conjunto limitado. Dado um conjunto $A$ tal que existem números reais $\underline{l}, \overline{l}$ verificando,

$$\forall x \in A : \underline{l} \leq x \leq \overline{l}\,,$$

diremos que $\underline{l}$ e $l$ são o supremo e o infímo de $A$ se existirem sucessões $\bar{x}_n$ e $\underline{x}_n$ de termos em $A$ convergindo respectivamente para $\bar{l}$ e $\underline{l}$. Todo o conjunto limitado de $\mathbb{R}$ possui um supremo e um infímo (Axioma do Supremo).

**Dem.** Vamos supor que $u$ é crescente (o caso em que $u$ é decrescente reduz-se ao primeiro se considerar-mos a sucessão auxiliar $w_n = -u_n$). Seja $\bar{l}$ o supremo do conjunto dos seus termos $\{u_n\}$. Vamos mostrar que $\bar{l}$ é de facto o limite da sucessão $u_n$. Para tal, consideramos uma vizinhança

$$V_\epsilon = ]\bar{l} - \epsilon, \bar{l} + \epsilon[$$

de raio arbitrário $\epsilon$. Pela definição de supremo, existe um termo $u_p \in V_\epsilon$. Como $u$ é crescente, temos para $n > p$

$$u_p \leq u_n \leq \bar{l}\,.$$

Em particular

$$\forall n > p \ : \quad |u_n - \bar{l}| < \epsilon\,.$$

Verifica-se assim a definição de convergência formulada em (1.4). ∎

**Lema 1.4** *Sejam $u$ e $v$ duas sucessões convergentes tais que, para um certo $p_0 \in \mathbb{N}$*

$$v_n \leq u_n \qquad \forall\, n > p_0\,. \tag{1.5}$$

*Então,*

$$\lim v_n \leq \lim u_n\,.$$

**Dem.** designando por $L_1$ e $L_2$ respectivamente os limites de $v$ e $u$, pretendemos verificar que

$$L_1 \leq L_2\,.$$

Como vista a uma contradição, supunhamos que $L_1 > L_2$. Designando por $d = |L_1 - L_2|$ a distância entre os limites, as hipóteses do lema garantem a existência de naturais $p_1, p_2$ tais que

$$n > p_1 \quad \Rightarrow \quad L_1 - \frac{d}{2} < v_n < L_1 + \frac{d}{2}\,,$$

$$n > p_2 \quad \Rightarrow \quad L_2 - \frac{d}{2} < u_n < L_2 + \frac{d}{2}\,.$$

Observe então que para $n > \max\{p_0, p_1, p_2\}$, teremos

$$u_n < L_2 + \frac{d}{2} = L_1 - \frac{d}{2} < v_n\,,$$

assim obtendo uma contradição com a condição (1.5). ∎

Uma consequência deste lema é que se $u$ é uma sucessão convertente, tal que, a partir de certa ordem $p$ se verifica

$$a \leq u_n \leq b$$

então

$$a \leq \lim u \leq b\,.$$

(pode comparar $u$ com as sucessões constantes iguais a $a$ e a $b$ respectivamente). Dito de outro modo, se o conjunto dos termos $\{u_n\}$ de uma sucessão convergente está contido num intervalo fechado $[a, b]$, o seu limite também deverá pertencer a $[a, b]$. No resultado seguinte exploramos um pouco mais a ideia de enquadramento dos termos de uma sucessão.

**Lema 1.5** *(Lema das sucessões enquadradas) Sejam $u$ $v$, $w$ sucessões para as quais existe $p_0 \in \mathbb{N}$*

$$n > p_0 \quad \Rightarrow \quad v(n) \leq u(n) \leq w(n)\,.$$

*Se $v$ e $w$ forem convergentes para o mesmo limite $l$ então $u$ é uma sucessão convergente para $l$.*

**Dem.** A convergência da sucessão $u$ ficará estabelecida se verificar-mos que $u$ goza da propriedade (1.4) tomando nessa definição $L = l$. Dado $\epsilon > 0$, concluímos que existem $p_1$ e $p_2$ tais que

$$|w_n - l| < \epsilon \quad \text{para } n > p_1 \tag{1.6}$$

$$|v_n - l| < \epsilon \quad \text{para } n > p_2\,. \tag{1.7}$$

Assim, se considerar-mos $p > \max\{p_0, p_1, p_2\}$, as desiguladades anteriores serão ambas verificadas para $n > p$. Observe então que, para $n > p$

$$l - \epsilon \leq v_n - l \leq u_n - l \leq w_n - l \leq l + \epsilon\,,$$

ou seja $|u_n - l| < \epsilon$. ■

Os dois lemas anteriores revelam a sua utilidade quando pretendemos estabelecer a convergência de uma sucessão sem recorrer ao uso da definição.

**Exemplos**

(i) Considere a sucessão

$$u_1 = 0,9 \quad u_2 = 0,99 \quad u_3 = 0,999 \quad \ldots \quad u_n = 1 - \frac{1}{10^n}\,.$$

Trata-se de uma sucessão crescente, limitada superiormente por 1. Concluímos que $u$ é uma sucessão convergente (qual é o seu limite?).
(ii) Considere a sucessão

$$v_n = \frac{\sin(n^2)}{n^2}\,.$$

Repare que, qualquer que seja o natural $n$

$$-\frac{1}{n^2} \leq v_n \leq \frac{1}{n^2}\,.$$

Como as sucessões $w_n = -\frac{1}{n^2}$ e $h_n = \frac{1}{n^2}$ convergem para o mesmo limite, concluímos que $v_n$ é convergente.

Uma sucessão convergente para zero é designada por **infinitésimo**. Dada uma sucessão $u$ e um real $L$, podemos considerar a sucessão $(|u_n - L|)$ que para cada $n$ mede a distância do termo $u_n$ a $L$. Afirmar que $u_n$ converge para $L$ equivale a afirmar que $(|u_n - L|)$ é um infinitésimo.

Enunciemos propriedades aritméticas das sucessões convergentes.

**Lema 1.6** *Sejam $u$ e $v$ sucessões convergentes para $L_1$ e $L_2$ respectivamente. Então:*
*(i) a sucessão $u + v$ é convergente para $L_1 + L_2$.*
*(ii) Sendo $k$ um número real, $ku$ é convergente para $kL_1$.*

**Dem.** (i) Pretendemos justificar que, dado um certo $\epsilon > 0$, podemos fornecer uma ordem $p$ tal que

$$n > p \quad \Rightarrow \quad |u_n + v_n - (L_1 + L_2)| < \epsilon\,.$$

Da desigualdade "triangular"

$$|a + b| \leq |a| + |b| \qquad \forall\, a, b \in \mathbb{R}\,,$$

resulta

$$|u_n + v_n - (L_1 + L_2)| = |(u_n - L1) + (v_n - L_2)| \leq |u_n - L_1| + |v_n - L_2|\,. \quad (1.8)$$

A hipótese de convergência de $(u_n)$ para $L_1$, garante a existência de $p_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > p_1 \quad \Rightarrow \quad |u_n - L_1| < \epsilon/2\,.$$

Análogamente, existe $p_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > p_2 \quad \Rightarrow \quad |v_n - L_2| < \epsilon/2\,.$$

Assim, tomando um natural $p \geq \max\{p_1, p_2\}$, teremos

$$n > p \quad \Rightarrow \quad |u_n - L_1| + |v_n - L_2| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon\,.$$

Podemos então concluir, por (1.8), que

$$n > p \quad \Rightarrow \quad |u_n + v_n - (L_1 + L_2)| < \epsilon\,,$$

assim se justificando o resultado.

(ii) Daremos uma justificação resumida. No caso de $k = 0$, a afirmação é trivial. No caso de $k \neq 0$, observe que

$$|ku_n - kL| < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad |u_n - L| < \epsilon/|k|\,. \tag{1.9}$$

Dado $\epsilon > 0$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > p \quad \Rightarrow \quad |u_n - L| < \epsilon/|k|\,.$$

Logo, por (1.9), para $n > p$,

$$|ku_n - kL| < \epsilon\,,$$

assim se provando a condição de convergência de $(ku_n)$ para $kL$. ■

**Lema 1.7** *Sejam $u$ e $v$ sucessões convergentes para $L_1$ e $L_2$ respectivamente. Então:*
*(i) a sucessão $uv$ é convergente para $L_1L_2$.*
*(ii) Se $L_2 \neq 0$ e $v_n \neq 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$ então a sucessão $\frac{u}{v}$ converge para $\frac{L_1}{L_2}$.*

**Dem.** (i) Observe que

$$|u_nv_n - L_1L_2| = |(u_n - L_1)v_n + L_1(v_n - L_2)| \leq |(u_n - L_1)| \cdot |v_n| + |L_1| \cdot |(v_n - L_2)|\,.$$

Posto que $v$ é uma sucessão convergente, é em particular limitada. Pelo que existe $M > 0$ tal que

$$|v_n| < M \quad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Podemos então escrever

$$|u_nv_n - L_1L_2| \leq M|(u_n - L_1)| + |L_1| \cdot |(v_n - L_2)|\,. \tag{1.10}$$

Observe que pelas alineas (i)–(ii) do lema anterior, a sucessão

$$z_n = M|(u_n - L_1)| + |L_1| \cdot |(v_n - L_2)|$$

é um infinitésimo. Pelo lema das sucessões enquadradas aplicado a (1.10) ,

$$|u_nv_n - L_1L_2| \to 0\,,$$

o que conclui a justificação de (i). ■

Dada uma sucessão $u$, e dada uma função $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, podemos engendrar uma nova sucessão $f \circ u$ através da operação de composição, a saber

$$f \circ u\,(n) = f(u(n)) \quad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

As características da composta $f \circ u$ são distintas das características de $u$. Por exemplo, $u$ pode ser convergente sem que $f \circ u$ o seja (e vice-versa).

**Exemplo 1.4** Considere

$$f(x) = \begin{cases} -1\,, & \text{se } \ x \leq 0 \\ \\ 1\,, & \text{se } \ x > 0 \end{cases} \quad .$$

Considere as sucessões $u_n = \frac{1}{n}$ e $v_n = (-1)^n \frac{1}{n}$. Estude a convergência das sucessões $f \circ u$ e $f \circ v$.

### Exercícios

**1.** Calcule os termos de ordem 1, 10 e 100 da sucessão

$$u_n = \frac{1}{n^2}\,.$$

Indique um valor $M$ tal que, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$

$$|u_n| \leq M\,.$$

**2.** Considere a sucessão $v_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ e a vizinhança de zero

$$V = \left]-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right[\,.$$

Verifique que $v_{81} \notin V$. Indique um valor para $p$ tal que

$$v_n \in V, \qquad \forall n > p$$

**3.** Considere a sucessão $u_n = \frac{n+1}{2n-1}$. Justifique que

$$u_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{4n-2}\,.$$

Conclua sobre a convergência de $u_n$.

**4.** Considere a mesma sucessão $u_n$ do exercício anterior. Justifique que

$$u_n = \frac{1+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}}\,.$$

Conclua sobre a convergência de $u_n$ recorrendo ao Lema 1.7, alinea $(ii)$.

**5.** Dê um exemplo de uma sucessão $w$ tal que

$$\begin{cases} w_n > \frac{1}{10} & \text{se } \ n \text{ ímpar}\,, \\ w_n < 0 & \text{se } \ n \text{ par}\,. \end{cases}$$

De um modo geral, uma sucessão que verifique estas condições poderá ser convergente?

**6.** Considere a seguinte sucessão (definida por um processo de recorrência)

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n} \end{cases}$$

Verifique que se $1 \leq u_n \leq 2$ então $1 \leq u_{n+1} \leq 2$. O que podemos concluir sobre o conjunto de termos $\{u_n\}$?

**7.** Verifique que se $x \in [1,2]$ então $\sqrt{2x} \geq x$. Utilize este facto para mostrar que a sucessão $u_n$ do exercício anterior é monótona. O que pode concluir sobre $u_n$ a partir do Lema 1.3?

**8.** Considere

$$u_n = \frac{n+\cos(n)}{n-\sin(n)}\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

Determine sucessões $w$ e $v$ convergentes para o mesmo limite tais que

$$w_n \leq u_n \leq v_n\,.$$

Conclua sobre a convergência de $u$.

# Para ir um pouco mais longe.

Como podemos observar no exemplo da sucessão $u_n = (-1)^n$, o facto de uma sucessão ser limitada não garante que ela seja convergente. No entanto, esta sucessão limitada possui pelo menos uma "subsucessão" convergente. Por exemplo, se considerar $u_{2n}$ (i.e. os termos de ordem par da sucessão) obtemos uma nova sucessão convergente para 1. Vamos definir com mais rigor a noção de subsucessão:

**Definição.** Seja $u_n$ uma sucessão e seja $i : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ uma sucessão estritamente crescente. Então a sucessão $v(n) = u(i(n))$ é designada por subsucessão de $u_n$.

Observe que no caso da subsucessão dos termos de ordem par devemos escolher $i(n) = 2n$. Temos o seguinte resultado geral para as sucessões limitadas.

**Teorema 1.8** *Toda a sucessão limitada possui uma subsucessão convergente.*

**Dem.** Consideremos uma sucessão limitada $u$, i.e. existem $m, M \in \mathbb{R}$ tais que

$$m \leq u_n \leq M \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos o valor real

$$c_n = \inf\{u_k : k \geq n\}\,.$$

Repare que pela hipótese de limitação de $u$, os $c_n$ estão bem definidos. Mais precisamente,

$$m \leq u_n \leq M \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad m \leq c_n \leq M \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

Por outro lado

$$c_1 \leq c_2 \leq c_3 \leq \;\; ...$$

Assim, a sucessão $c$ é crescente e limitada. Logo, converge para um limite que designaremos por $l_c$. Pela caracterização dos termos $c_n$, podemos construir uma subsucessão $(u_{i_n})$ de $u$ do seguinte modo recorrente. Tomamos $i_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$u_{i_1} \leq c_1 + 1\,,$$

e seguidamente, para $n \geq 2$, escolhemos termos de ordem $i_n$ tais que

$$i_n \geq i_{n-1} \qquad \text{e} \quad c_{i_{n-1}} \leq u_{i_n} < c_{i_{n-1}} + \frac{1}{n-1}\,. \tag{1.11}$$

Posto que a sucessão $(c_{i_n})$ é subsucessão de $(c_n)$, ela converge para o mesmo limite. Logo,

$$\lim c_{i_n} = \lim c_{i_n} + \frac{1}{n} = l_c\,.$$

Pelo lema das sucessões enquadradas, resulta de (1.11) que

$$\lim u_{i_n} = l_c\,.$$

■

**Nota 1.1** É possível uma demonstração alternativa do Teorema anterior utilizando o seguinte princípio:

*Toda a sucessão real possui uma subsucessão monótona.*

Recomenda-se ao leitor interessado a consulta da bibliografia da disciplina, nomeadamente "Introdução a Análise Matemática" de J. Campos Ferreira.

## 1.2 A noção de limite num ponto

Nesta secção classificamos o comportamento de uma função $f$ real de variável real num ponto $a \in \mathbb{R}$. Vamos supor que a função $f$ está definida num conjunto

$$V = ]a-\epsilon, a+\epsilon[ \setminus \{a\}$$

podendo ou não estar definida em $a$.

**Definição.** Diremos que $f$ tem limite em $a$ se e só se existe um número $L$ tal que, qualquer que seja a sucessão $u$ convergente para $a$ em que $\{u_n\} \subset V$, verifica-se

$$f(u_n) \to L\,.$$

Nesse caso escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L\,.$$

Tenha em conta os seguintes aspectos da definição de limite num ponto.

- As sucessões consideradas na definição de limite aproximam-se de $a$ por valores diferentes de $a$.
- Quando uma função tem limite $L$ em $a$,

  $$\lim f(x_n) = L$$

  qualquer que seja a sucessão $(x_n)$ convergente para $a$ com termos em $V$.

**Exemplo 1.5** A função função $f$ do Exemplo 1.4 não tem limite em zero uma vez que as sucessões $u$ e $v$ definidas respectivamente por

$$u_n = \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad w_n = -\frac{1}{n}\,.$$

convergem para zero mas as sucessões $f(u)$ e $f(w)$ convergem para 1 e $-1$ respectivamente.

**Exemplo 1.6** Considere a função $g(x) = x^{-1}$ definida em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Averiguemos a existência de limite em zero. Considerando $u_n = \dfrac{1}{n}$ observamos que

$$f(u_n) = \left(\frac{1}{n}\right)^{-1} = n\,.$$

A sucessão $f(u_n)$ não é convergente. Este exemplo basta-nos para concluir que $g$ não tem limite em zero.

**Exemplo 1.7** Estudemos o comportamento da função identidade $I(x) = x$ em zero (supomos $I$ definida em $\mathbb{R}$). Se considerar-mos uma qualquer sucessão $u_n$ tal que

$$\lim u_n = 0$$

decorre imediatamente que

$$\lim I(u_n) = \lim u_n = 0\,.$$

Logo $I$ verifica a definição de limite em zero com $L = 0$. Mais geralmente, temos

$$\lim I(u_n) = \lim u_n = a\,,$$

qualquer que seja a sucessão $u$ convergente para um ponto $a \in \mathbb{R}$. Donde se conclui:

$$\lim_{x\to a} I(x) = a \qquad \forall a \in \mathbb{R}\,.$$

**Exemplo 1.8** Consideremos agora a função $g(x) = x^2$ definida em $\mathbb{R}$ e averiguemos a existência de limite em zero. Começamos por observar a equivalência

$$\lim u_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim |u_n| = 0\,.$$

Supondo então uma sucessão $u$ convergente para zero, temos, a partir de certo ordem $p$,

$$|u_n| \leq 1\,.$$

Podemos então escrever, para $n \geq p$

$$0 \leq u_n^2 \leq |u_n|\,.$$

Posto que $|u_n| \to 0$, concluímos, pelo lema das sucessões enquadradas (com uma pequena adaptação - qual?), que

$$\lim u_n^2 = 0\,.$$

Como $u$ era uma qualquer sucessão convergente para zero, concluímos

$$\lim_{x\to 0} x^2 = 0\,.$$

Podemos definir a noção de **limite lateral** de uma função num ponto.

**Definição.** Diremos que uma função $f$ definida em $V^+ = ]a, a+\epsilon[$ tem limite lateral à direita (resp. à esquerda) de $a$ se existir $L^+$ (resp. $L^-$) tal que, para qualquer sucessão com termos em $V^+$ (resp. $V^- = ]a-\epsilon, a[$) convergente para $a$ verifica-se:

$$f(u_n) \to L^+ \quad (\text{resp. } L^-)\,.$$

Nesse caso escrevemos

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L^+\,, \qquad \left(\text{resp. } \lim_{x\to a^-} f = L^-\right)\,.$$

Repare que a existência de limite $L$ para uma função $f$ num ponto $a$ equivale a verificação das seguintes condições:

1) Existem os limites laterais $L^+$ e $L^-$.
2) $L^+ = L^-$.

Por exemplo, a função $f$ do Exemplo 1.4 tem limites laterais pelo que verifica 1) mas estes limites são diferentes e por isso não verifica 2).

Repare que as noções de limite introduzidas baseiam-se na noção de sucessão convergente. Assim os lemas seguintes decorrem dos lemas que vimos na secção anterior. Os lemas seguintes podem obviamente ser adaptados ao limite lateral esquerdo e ao limite lateral direito.

**Lema 1.9** *Sejam $f$ e $g$ funções com limite respectivos $l_1$ e $l_2$ em $a$. Então $f+g$ tem limite $l$ em $a$, em que $l = l_1 + l_2$ em $a$. Sendo $k$ um número real, a função $kf$ tem limite $l'$ em $a$, sendo $l' = kl_1$.*

**Lema 1.10** *Sejam $f$ e $g$ funções com limite respectivos $l_1$ e $l_2$ em $a$. Então $fg$ tem limite $l_1 l_2$ em $a$. Se $l_2 \neq 0$, a função $\frac{f}{g}$ está definida numa vizinhança de $a$ e tem limite $\frac{l_1}{l_2}$ nesse ponto.*

**Lema 1.11** *Sejam $f$, $g$ e $h$ funções definidas num conjunto $V = ]a-\epsilon, a+\epsilon[\setminus\{a\}$ tais que*

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \quad \forall x \in V\,.$$

*Se $g$ e $h$ tiverem o mesmo limite $l$ em $a$ então $f$ tem limite $l$ em $a$.*

Aplicaremos agora estes lemas ao estudo de limites concretos.

**Exemplo 1.9** Dada um monómio $m(x) = x^n$ (com $n$ natural) podemos, partindo do Exemplo 1.7, aplicando sucessivamento o Lema 1.10 para $n = 2, 3, ...$ concluir que

$$\lim_{x \to a} x^n = a^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Da mesma forma, combinando os Lemas 1.9 e 1.10, justificamos que, dado um polinómio de grau $n$

$$p(x) = k_n x^n + k_{n-1} x^{n-1} + ... + k_1 x + k_0$$

então,

$$\lim_{x \to a} p(x) = k_n a^n + k_{n-1} a^{n-1} + ... + k_1 a + k_0 = p(a)\,.$$

Neste caso observe que o limite coincide com o valor obtido pela substituição de $a$ na expressão algébrica que define o polinómio. No entanto, o limite pode existir sem que possamos efectuar essa substituição na expressão algébrica. Observe o exemplo seguinte.

**Exemplo 1.10** Consideramos a função $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ definida em $\mathbb{R}/\{0\}$. Trata-se do produto de duas funções $gh$ em que $g(x) = x$ tem limite zero em zero. Por sua vez, a função $h(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ é limitada no seu domínio:

$$|h(x)| \leq 1\,, \qquad \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\,.$$

Podemos concluir

$$\forall\, x \neq 0\,, |f(x)| = |x \cdot h(x)| = |x||h(x)| \leq |x|\,.$$

ou seja

$$-|x| \leq f(x) \leq |x|\,.$$

Pelo Lema 1.11, concluímos que $f$ tem limite zero em zero. Repare que um raciocínio semelhante permite justificar que, para qualquer função limitada $\hat{h}$ definida em $V = ]-\epsilon, \epsilon[\backslash\{0\}$ tem-se

$$\lim_{x \to 0} x \cdot \hat{h}(x) = 0\,.$$

Convidamo-lo a extender a observação anterior ao caso $f(x) = g(x)\hat{h}(x)$ em que $\hat{h}$ é limitada em $V$ e $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$.

**Exemplo 1.11** Considere a função $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ definida em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Consideremos $x > 0$. Observando que $\sin(x)$ representa a projecção no eixo das ordenadas do arco de comprimento $x$ podemos escrever

$$\frac{\sin(x)}{x} < 1\,. \tag{1.12}$$

Recordamos que a área $a(x)$ de um sector angular no círculo de raio 1 com arco de comprimento $x$ é dada por $a(x) = x/2$. podemos supor que o sector angular está contido no triângulo rectângulo $OPQ$ em que $O = (0, 0)$, $P = (1, 0)$ e $Q = (1, \tan(x))$ quando $x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$. Podemos por isso escrever:

$$a(x) = \frac{x}{2} < \frac{1}{2}\tan(x) = \frac{\sin(x)}{2\cos(x)}\,.$$

Esta equação é equivalente a

$$\frac{\sin(x)}{x} > \cos(x)\,. \tag{1.13}$$

Concluímos de (1.12) e (1.13) que para $x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$:

$$\cos(x) < f(x) < 1 \quad \forall x \in ]0, \frac{\pi}{2}[\,.$$

A mesma desigualdade vale para $x \in ]-\frac{\pi}{2}, 0[$ uma vez que as funções $f$ e $\cos(x)$ são pares (i.e. $f(x) = f(-x)$). Assim, por aplicação do Lema 1.11, concluímos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1\,.$$

## Exercícios

**1.** Consideremos uma função com domínio $D = \{0\} \cup ]1, +\infty[$. Fará sentido falar de limite em 0? E de limite lateral em 1?

**2.** Considere a função

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0\,. \end{cases}$$

Verifique que $g$ tem limite em zero.

**3.** Considere a função $g$ do exercício anterior. Considere também a função $f$ do Exemplo 1.4. Estude a existência de limite em zero para as funções $f + g$ e $fg$.

**4.** Observe que

$$\frac{\tan(x)}{x} = \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{1}{\cos(x)} .$$

Sabendo que $\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1$, justifique que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1 .$$

**5.** Considere a função

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases} .$$

Verifique que $h$ tem limite em zero. Considere agora a função $h \circ g$ em que $g$ é a função do Exercício 2. Estude a existência de limite em zero.

## 1.3 Continuidade de uma função de variável real

**Definição.** Seja $f$ uma função real definida numa vizinhança $V_\epsilon$ do ponto $a$ ($\epsilon > 0$), i.e. num intervalo de tipo $V_\epsilon(a) = ]a-\epsilon, a+\epsilon[$. Diremos que $f$ é contínua em $a$ se e só se

$$\text{(i) } \exists \lim_{x\to a} f(x) \quad \text{e} \quad \text{(ii) } \lim_{x\to a} f(x) = f(a) . \tag{1.14}$$

Alternativamente, podemos dizer que $f$ é contínua em $a$ se e só se existem os limites laterais em $a$ e

$$\text{(i) } \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = l \quad \text{e} \quad \text{(ii) } f(a) = l .$$

Quando uma função verifica apenas a propriedade (i), ela diz-se prolongável por continuidade em $a$. Nesse caso, podemos definir a função

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) , & \text{se } x \neq a \\ \\ l , & \text{se } x = a \end{cases} ,$$

A função $\bar{f}$, contínua em $a$, é designada por "prolongamento por continuidade" de $f$ em $a$.

Observe que a definição de continuidade (1.14) traduz-se pela seguinte condição sobre as sucessões convergentes para $a$:

*Qualquer que seja a sucessão* $(x_n)$ *com termos em* $]a-\epsilon, a+\epsilon[\setminus\{a\}$ *tal que* $x_n \to a$, *a respectiva sucessão das imagens* $(f(x_n))$ *converge para* $f(a)$.

Na caracterização anterior podemos, sem perda de generalidade, considerar que as sucessões $(x_n)$ consideradas convergem para $a$ numa vizinhança $]a-\epsilon, a+\epsilon[$ (dispensando deste modo a hipótese adicional dos termos $x_n$ serem distintos de $a$).

No que segue faremos por vezes uso da notação

$$\lim_{x_n \to a} f(x_n)$$

para designar o limite da sucessão $(f(x_n))$ quando $(x_n)$ é uma sucessão convergente para $a$.

**Exemplo 1.12** Do que vimos na secção anterior (Exemplo 1.9), se $p$ é um polinómio (que suporemos com domínio $\mathbb{R}$) verifica-se que, para qualquer $a \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \to a} p(x) = p(a)\,.$$

Assim, os polinómios são funções contínuas em qualquer número real $a$.

**Exemplo 1.13** Considere a função $f(x) = |x|$. Então $f$ é contínua em todo o $a \in \mathbb{R}$. Com efeito, seja $x_n$ uma sucessão convergente para $a$. Aplicando a desigualdade triangular, obtemos as estimativas

$$|x_n| = |x_n - a + a| \leq |a| + |x_n - a|\,, \tag{1.15}$$

e

$$|a| = |a - x_n + x_n| \leq |x_n - a| + |x_n|\,.$$

Esta última desigualdade é equivalente a

$$|a| - |x_n - a| \leq |x_n|\,. \tag{1.16}$$

Concluímos de (1.15)–(1.16)

$$|a| - |x_n - a| \leq |x_n| \leq |a| + |x_n - a|\,.$$

Pela definição de sucessão convergente, temos $|x_n - a| \to 0$. Pelo Lema das Sucessões Enquadradas (Lema 1.5), concluímos que

$$\lim_{x_n \to a} f(x_n) = \lim_{x_n \to a} |x_n| = \, |a| \, = f(a)\,.$$

**Exemplo 1.14** Sabemos da secção anterior que a função $f(x) = \sin(x)/x$ definida em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ verifica

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1\,.$$

Assim podemos definir em $\mathbb{R}$ o seguinte prolongamento por continuidade da função $f$:

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0\,. \end{cases}$$

Uma caracterização equivalente para a continuidade num ponto $a$ de uma função $f$ definida numa vizinhança $]a-\epsilon, a+\epsilon[$ é dada pela seguinte condição:

$$\forall e>0 \quad \exists d_e>0 \ : \quad |x-a|<d_e \Rightarrow |f(x)-f(a)|<e\,. \tag{1.17}$$

Esta caracterização sugere a ideia geométrica que a aproximação de $f(a)$ dada por $f(x)$ tem erro inferior a $e$ se considerar-mos objectos $x$ que distem de $a$ menos que $d_e$. Claramente, o valor da distância $d_e$ deverá depender da margem de erro pretendida: quanto menor fôr $e$, menor deverá ser $d_e$. Convidamos o leitor interessado a elucidar a relação de equivalência entre (1.17) e (1.14). A formulação de duas caracterizações equivalentes para o conceito de continuidade justifica-se pelo facto de certos resultados decorrerem mais facilmente de uma, em detrimento da outra: de um ponto de vista prático, elas complementam-se.

**Exemplo 1.15** Seja $f$ uma função definida numa vizinhança $]a-\epsilon, a+\epsilon[$ de $a$, contínua em $a$, tal que $f(a)\neq 0$. Então existe uma vizinhança de raio $\epsilon_2 \leq \epsilon$ tal que

$$\forall x \in ]a-\epsilon_2, a+\epsilon_2[\,, \quad f(x)\neq 0\,.$$

Sem perda de generalidade, supomos $f(a)>0$. Considerando a caracterização (1.17), se tomarmos $e=f(a)/2$, sabemos que existe $d_e$ tal que

$$x \in ]a-d_e, a+d_e[ \quad \Rightarrow \quad f(x) \in \left]f(a)-\frac{f(a)}{2}, f(a)+\frac{f(a)}{2}\right[\,,$$

em particular

$$f(x) > \frac{f(a)}{2} \quad \forall\, x \in ]a-d_e, a+d_e[.$$

Tomando $\epsilon_2 \leq \min\{d_e, \epsilon\}$, justifica-se a afirmação.

Os dois lemas seguintes são de justificação simples se atendermos aos resultados análogos limites.

**Lema 1.12** *Sejam $f$ e $g$ duas funções contínuas em $a$. Então $f+g$ é contínua em $a$ e sendo $k$ um número real, $kf$ é contínua em $a$.*

**Lema 1.13** *Sejam $f$ e $g$ duas funções contínuas em $a$. Então $fg$ é contínua em $a$. No caso de $g(a)\neq 0$, a função $\frac{f}{g}$ é contínua em $a$.*

No lema seguinte estabelecemos uma propriedade fundamental das funções contínuas. Na sua demonstração faremos uso das duas caracterizações da continuidade num ponto introduzidas nesta secção.

**Lema 1.14** *(composição de funções contínuas) Seja $f$ uma função definida em $]a-\epsilon_1, a+\epsilon_1[$, contínua em $a$ e seja $g$ definida numa vizinhança $]f(a)-\epsilon_2, f(a)+\epsilon_2[$, contínua em $f(a)$. Então $g\circ f$ é contínua em $a$.*

**Dem.** Começemos por verificar que $g \circ f$ está definida numa vizinhança de $a$. Com efeito, a hipótese de continuidade de $f$ em $a$ garante, por (1.17), a existência de $d$ tal que

$$|x-a| < d \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon_2 \,.$$

ou equivalentemente

$$x \in ]a-d, a+d[ \Rightarrow f(x) \in \, ]f(a) - \epsilon_2, f(a) + \epsilon_2[ \,.$$

Assim, a restrição do domínio de $f$ a $]a-d, a+d[$ garante que a expressão $g(f(x))$ tem sentido.

Consideremos agora $x_n$ uma qualquer sucessão convergente para $a$ (com termos em $]a-\delta, a+\delta[$). Pela continuidade de $f$ em $a$, $f(x_n)$ converge para $f(a)$. Pela continuidade de $g$ em $f(a)$ a sucessão $g(f(x_n))$ converge para $g(f(a))$. A demonstração terminou. ■

**Exercício** Confronte o resultado anterior com o exercício 5 da última secção.

Podemos definir a noção de continuidade lateral num ponto $a$. Diremos que uma função $f$ definida no intervalo $[a, a+\epsilon[$ ($]a-\epsilon, a]$) é contínua à direita (à esquerda) de $a$ se o limite lateral direito (esquerdo) coincide com o valor $f(a)$, i.e.

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a) = \lim_{x \to a^+} f(x) \,.$$

Obviamente, podemos verificar que $f$ é contínua em $a$ verificando que $f$ é contínua à direita e à esquerda de $a$.

Dado um intervalo aberto $I = ]a, b[$ ou $I = \mathbb{R}$, diremos que $f$ é contínua em $I$ se fôr conínua em todos os pontos de $I$. Dado um intervalo fechado $I = [a, b]$, diremos que $f$ é contínua em $I$ se fôr contínua em todo o $x \in ]a, b[$, se fôr contínua à direita de $a$ e se fôr contínua à esquerda de $b$. Definições análogas valem para intervalos de tipo $[a, b[$ ou $]a, b]$.

Enunciamos agora dois teoremas que estabelecem propriedades importantes das funções contínuas.

**Teorema 1.15** *(Teorema de Bolzano)*

*Seja $f$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$ em que $f(a) \neq f(b)$. Seja $k$ um valor compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$, i.e.*

$$\min\{f(a), f(b)\} < k < \max\{f(a), f(b)\} \,. \tag{1.18}$$

*Então existe $c \in ]a, b[$ tal que $f(c) = k$.*

**Dem.** Consideramos dois subconjuntos de $[a, b]$:

$$I^k = \{x \in [a, b] : f(x) < k\} \quad \text{e} \quad I_k = \{x \in [a, b] : f(x) > k\} \,.$$

Estes dois conjuntos são obviamente disjuntos e não vazios (por (1.18)). Para fixar ideias, podemos supor $f(a) < k$ e $f(b) > k$. Definimos (axioma do supremo)

$$c = \sup\{x \in I^k\}\,.$$

Afirmamos que $f(c) = k$. Observe que $c$ pode ser aproximado (inferiormente) por uma sucessão $(x_n)$ com termos em $I^k$. Temos então

$$x_n \to c \quad \text{e} \quad f(x_n) \leq k\,.$$

A continuidade de $f$ em $c$ obriga a que

$$\lim f(x_n) = f(c) \leq k\,.$$

Por outro lado, se admitirmos, com vista a um absurdo, que $f(c) < k$, temos necessariamente $c < b$. Afirmamos a existência de uma vizinhança $]c-\epsilon, c+\epsilon[$ tal que

$$f(x) < k \quad \forall x \in ]c-\epsilon, c+\epsilon[\,.$$

Com efeito, basta considerar a caracterização de continuidade (1.17) no ponto $c$ com $e = (k - f(c))/2$, tomando, por exemplo,

$$\epsilon = \min\{d_e, (b-c)/2, (c-a)/2\}\,.$$

(porque se impõe a condição de $\epsilon$ ser inferior a $(b-c)/2$ e a $(c-a)/2$?)
O facto de $f(x)$ ser inferior a $k$ em $]c-\epsilon, c+\epsilon[$ impede $c$ ser o supremo de $I^k$. Absurdo. ■

**Nota 1.2** O leitor facilmente verificará que o Teorema de Bolzano implica o seguinte resultado:

Seja $f$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e seja $k$ um valor tal que

$$\min\{f(a), f(b)\} \leq k \leq \max\{f(a), f(b)\}\,. \tag{1.19}$$

Então existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = k$.

O Teorema de Bolzano também é conhecido por **Teorema do Valor Intermediário**. No estudo da existência de raízes para uma equação utiliza-se frequentemente o seguinte corolário de justificação imediata:

**Corolário 1.16** *Seja $f$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$ tal que*

$$f(a) \cdot f(b) < 0\,.$$

*Então existe $c \in ]a, b[$ tal que $f(c) = 0$.*

**Exemplo 1.16** Considere $p : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que

$$p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 1\,.$$

A função polinomial $p$ é contínua em $[0,1]$ e temos

$$p(0) = 1 \quad \text{e} \quad p(1) = -1\,.$$

Assim, pelo Teorema de Bolzano (ou pelo seu corolário) podemos concluir que existe $c \in ]0,1[$ tal que $p(c) = 0$.

**Exemplo 1.17** Estudemos a existência de uma solução em $]0, \frac{\pi}{2}[$ para a equação

$$\tan(x) = e^x\,. \tag{1.20}$$

Para tal assumiremos a continuidade das funções $\tan(x)$ e $e^x$ no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}[$. Definimos a função contínua

$$h : \left[0, \frac{\pi}{2}\right[ \to \mathbb{R}\,, \qquad x \curvearrowright \tan(x) - e^x\,.$$

Assim, a existência de solução para a equação (1.20) em $[0, \frac{\pi}{2}[$, equivale, nesse intervalo, à existência de raízes para a função $h$:

$$e^{x_0} = \tan(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad h(x_0) = e^{x_0} - \tan(x_0) = 0\,.$$

Note que, pelo crescimento e continuidade da função $e^x$ em $\mathbb{R}$, temos, que se $x < \pi/2$, então

$$e^x < e^{\pi/2} \quad \text{e} \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} e^x = e^{\frac{\pi}{2}}\,.$$

Para além disso

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty,$$

no sentido em que, para todo o valor $M > 0$, teremos $\tan(x) > M$ desde que $x \in \left]\frac{\pi}{2} - \epsilon_M, \frac{\pi}{2}\right[$ (aqui, $\epsilon_M > 0$ é uma quantidade perto de zero, dependente de $M$).

Logo, tomando $x_1 < \pi/2$, em que $x_1$ está suficientemente próximo de $\pi/2$, teremos

$$\tan(x_1) > e^{\pi/2} > e^{x_1} \qquad \text{ou} \qquad h(x_1) > 0\,.$$

Posto que $h(0) = -1$, estamos em condições de aplicar o Teorema de Bolzano no intervalo $[0, x_1]$ e concluímos a existência de $x_0$ tal que

$$0 < x_0 < x_1 < \frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad h(x_0) = \tan(x_0) - e^{x_0} = 0\,.$$

Note que a existência de uma solução para (1.20) não poderia ser obtida por uma resolução algébrica.

No resultado seguinte estabelecemos outra propriedade importante das funções contínuas definidas em intervalos limitados e fechados (também designados por intervalos compactos).

**Teorema 1.17** *(Teorema de Weierstrass)*
*Seja $f$ uma função contínua no intervalo $[a,b]$. Então $f$ tem um máximo e um mínimo em $[a,b]$, i.e.*

$$\exists x_m, x_M \in [a,b] : \quad \forall x \in [a,b]\,, \quad f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)\,.$$

**Dem.** Daremos uma ideia da demonstração do seguinte facto:

$$\exists x_M \in [a,b] \; : \forall x \in [a,b]\,, \quad f(x) \leq f(x_M)\,.$$

A demonstração da existência de mínimo faz-se de modo análogo. Define-se

$$\bar{c} = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}\,,$$

se o contradomínio de $f$ fôr limitado superiormente, ou $\bar{c} = +\infty$ caso contrário. Tomamos uma sucessão $x_n$ com termos em $[a,b]$ tal que

$$f(x_n) \to \bar{c}\,.$$

(entenda-se que se $\bar{c} = \infty$ a sucessão $f(x_n)$ toma valores arbitrariamente grandes a partir de certa ordem). Observe que $x_n$ é uma sucessão naturalmente limitada pelo que possui uma subsucessão convergente $x_{i_n}$ (ver "Para ir um pouco mais longe", no final da secção 1.1). Designemos por $x_M$ o seu limite, i.e.

$$x_{i_n} \to x_M\,.$$

Necessariamente, $x_M \in [a,b]$. Por outro lado, pela continuidade de $f$ em $[a,b]$, temos

$$\bar{c} = \lim f(x_{i_n}) = f(x_M)\,.$$

Em particular, $\bar{c}$ é finito. Por definição, para todo o $x \in [a,b]$,

$$f(x) \; \leq \; \bar{c} = f(x_M)\,.$$

■

**Nota 1.3** No resultado anterior, é decisiva a hipótese do domínio ser um intervalo limitado e fechado. Por exemplo, a função $f(x) = 1/x$ é contínua no intervalo $]0,1[$ sem que possua máximo ou mínimo nesse intervalo.

Como consequência dos dois teoremas anteriores, podemos carcterizar o contradomínio de uma função contínua num intervalo compacto.

**Corolário 1.18** *Seja $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ uma função contínua. Então o seu contradomínio é um intervalo compacto. Mais precisamente:*

$$f([a,b]) = [m,M] ,$$

*em que $m$ e $M$ são respectivamente o mínimo e o máximo da função $f$.*

### Exercícios

**1.** Considere a função $h$ definida em $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$ por

$$h(x) = \frac{x-1}{x^2-1} .$$

Verifique que podemos prolongar a função $h$ por continuidade em $x = 1$. (sugestão: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$)

Poderemos prolongar $h$ por continuidade em $x = -1$?

**2.** Sejam $f$ e $g$ funções contínuas em $]a,b[$. Suponha a existência de $x_0 \in ]a,b[$ tal que $f(x_0) > g(x_0)$. Justifique que existe uma vizinhança $V_\epsilon = ]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[$ tal que

$$f(x) > g(x) \quad \forall x \in V_\epsilon .$$

**3.** Considere a função

$$h(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} .$$

Considere as sucessões

$$u_n = \frac{1}{\pi/2 + 2\pi n} \quad \text{e} \quad v_n = \frac{1}{-\pi/2 + 2\pi n} .$$

Verifique que

$$\lim h(u_n) \neq \lim h(v_n) .$$

Conclua sobre a possibilidade de $h$ ser prolongada por continuidade no ponto $x = 0$.

**4.** Considere a função de variável real

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{se } x = \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N}) \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Justifique que $h$ não é contínua nos pontos pertencentes ao conjunto

$$\{x \in \mathbb{R} : \ x = \frac{1}{n} \quad n \in \mathbb{N}\} .$$

Será $h$ contínua em zero?

**5.** Dado um número real $k$ considere a função

$$g(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x < 0 \\ x + k & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Considere agora a função quadrática $f(x) = x^2$. Suponha $k = 2$. Será $f \circ g$ contínua em zero?

Existirão valores de $k$ para os quais $f \circ g$ é contínua em zero?

**6.** Utilizando o Teorema de Bolzano, assumindo a continuidade da função $\cos(x)$ em $\mathbb{R}$, justifique a existência de $x_0 \in ]0, \frac{\pi}{3}[$ tal que

$$x_0 = \cos(x_0)\,.$$

**7.** Seja $p(x)$ um polinómio de grau ímpar de tipo

$$p(x) = x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + (...) + a_1 x + a_0\,. \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Justifique a existência de $M > 0$ tal que $p(M) > 0 > p(-M)$. Conclua sobre a existência de pelo menos uma raiz para o polinómio $p$.

**8.** Considere a função $h$ do Exercício 3. Verifique que $h$ goza da propriedade do valor intermediário. Ou seja: dados $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$,

$$\forall k \in ] \min\{f(a), f(b)\}\,, \max\{f(a), f(b)\}[\,, \quad \exists c \in ]a, b[ :\ h(c) = k\,.$$

# Para ir um pouco mais longe

Vamos considerar $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ uma função contínua e estritamente monótona. Pelas propriedades das funções contínuas estudadas neste capítulo, temos

$$f([a, b]) = [c\,,\, d]\,,$$

em que

$$c = \min\{f(a), f(b)\} \qquad \text{e} \qquad d = \max\{f(a), f(b)\}\,.$$

Observe que, por ser estritamente monótona, $f$ é injectiva, i.e.

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y\,.$$

Assim, podemos definir a sua inversa

$$f^{-1} : [c, d] \mapsto [a, b]\,, \qquad f^{-1}(y) = x \quad \text{sse} \quad f(x) = y\,.$$

A função $f^{-1}$ é também estritamente monótona, com o mesmo tipo de monotonia que $f$. Com efeito, suponha, para fixar ideias, que $f$ é estritamente decrescente. Sejam $x_1 = f^{-1}(y_1)$ e $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Então

$$y_1 < y_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow x_1 > x_2 \Leftrightarrow f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2)\,,$$

assim se estabelecendo o decrescimento estrito de $f^{-1}$. Estudemos agora a continuidade da função inversa nos pontos do seu domínio. Temos o seguinte resultado:

**Teorema 1.19** *Considere uma função $f$ definida num intervalo fechado $[a, b]$. Suponha $f$ contínua e estritamente monótona. Então*

$$f^{-1} : [c, d] \mapsto [a, b]$$

*é contínua em todos os pontos do seu domínio.*

**Dem.**

Consideremos $y_0 \in [c, d]$ e $y_n$ uma sucessão convergente para $y_0$. Pretendemos verificar que

$$\lim f^{-1}(y_n) = f^{-1}(y_0)\,.$$

Podemos supor que $y_n$ é monótona. Esta hipótese adicional simplifica o argumento e não restringe a generalidade do resultado. Consideramos

$$x_n = f^{-1}(y_n) \qquad \text{e} \qquad x_0 = f^{-1}(y_0)\,, \tag{1.21}$$

com $x_n, x_0 \in [a, b]$. Observe que a sucessão $x_n$ é limitada e monótona. Logo é uma sucessão convergente, i.e.

$$x_n \to \bar{x}_0\,,$$

para um certo $\bar{x}_0 \in [a, b]$. Escrevemos

$$\lim f^{-1}(y_n) = \bar{x}_0\,. \tag{1.22}$$

Pela continuidade de $f$ em $\bar{x}_0$,

$$f(\bar{x}_0) = \lim f(f^{-1}(y_n)) = \lim y_n = y_0\,.$$

Assim, por (1.21),

$$f(\bar{x}_0) = f(x_0)\,.$$

Pela injectividade de $f$, concluímos

$$\bar{x}_0 = x_0\,,$$

ou, por (1.22),

$$\lim f^{-1}(y_n) = f^{-1}(y_0)\,,$$

o que termina a justificação. ∎

**Exercício** Mostre que no caso de funções **contínuas** num intervalo, a injectividade equivale à monotonia estrita.

# Capítulo 2

# A derivada e suas aplicações.

## 2.1 Noção de derivada de uma função num ponto.

Nesta secção estudaremos funções reais de variável real definidas em intervalos, eventualmente ilimitados. Dado um intervalo $I \subset \mathbb{R}$, dizemos que $a \in I$ é ponto interior de $I$ se existir uma vizinhança $V_\epsilon(a) = ]a - \epsilon, a + \epsilon[$ tal que

$$V_\epsilon(a) \subset I\,.$$

Denotaremos por $\overset{\circ}{I}$ o conjunto dos pontos interiores de $I$. No caso do intervalo ter infímo $a$ e supremo $b$, é fácil concluir que

$$\overset{\circ}{I} = ]a, b[\,.$$

**Definição.** Seja $f : I \mapsto \mathbb{R}$ uma função real de variável real e $a$ um ponto interior de $I$. Diremos que $f$ é **diferenciável** em $a$ se existir o limite

$$D = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\,. \tag{2.1}$$

A existência deste limite significa, do ponto de vista geométrico, que podemos traçar uma recta tangente ao gráfico de $f$ passando no ponto $(a, f(a))$. O declive dessa recta é $D$. $D$ é designado por **derivada de $f$ no ponto** $a$ e denotado por $f'(a)$.

Em alternativa a (2.1) podemos escrever

$$D = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}\,. \tag{2.2}$$

A fórmula (2.2) resulta de (2.1) se considerar-mos a mudança de variável $h = x - a$. Assim

$$x = a + h \qquad \text{e} \qquad x \to a \quad \text{equivale a} \quad h \to 0\,.$$

Por outro lado, a existência do limite (2.1) permite-nos escrever em que

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - D = r(x-a)\,,$$

em que $r$ é uma função real definida em $]-\epsilon,\epsilon[$ tal que

$$\lim_{x\to a} r(x-a) = 0\,.$$

Podemos pois, em alternativa a (2.1) ou (2.2) definir a diferenciabilidade de $f$ em $a$ do seguinte modo:

*Uma função $f$ é diferenciável em $a$ se e só se existe $D \in \mathbb{R}$ tal que*

$$f(x) = f(a) + D(x-a) + (x-a)r(x-a)\,, \tag{2.3}$$

*em que $r$ é uma função definida numa vizinhança de $a$ tal que*

$$\lim_{x\to a} r(x-a) = 0\,.$$

*Necessariamente, a constante $D$ é única e coincide com o limite (2.1) (ou (2.2)).*

As definições (2.1)–(2.2) de inspiração cartesiana, sugerem o processo de determinação da tangente ao gráfico num ponto através dos declives de rectas secantes ao gráfico em $(a, f(a))$ e $(x, f(x))$. Estas rectas aproximam-se da tangente quando $x$ se aproxima de $a$. Por sua vez, a definição (2.3) revela existência de uma aproximação linear $\bar{f}(x) = f(a) + D(x-a)$ à função $f$ numa vizinhança de $a$ para a qual o erro cometido $r(x-a)(x-a)$ é "muito pequeno" quando comparado com o de outras aproximações lineares.

**Nota 2.1** No caso de uma função $f$ definida num intervalo $[a, a+\epsilon[$ $(\epsilon > 0)$, diremos que $f$ tem **derivada lateral direita** em $a$ se e só se existe um real $D^+$ tal que

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = D^+\,.$$

Alternativamente, representamos $f'(a^+) := D^+$. De forma análoga se define a **derivada lateral esquerda** em $a$ como sendo o

$$f'(a^-) := \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

supondo $f$ definida num intervalo $]a-\epsilon, a]$. Claramente, uma função é diferenciável em $a$ se $f'(a^+) = f'(a^-)$ (conquanto os dois limites existam).

**Nota 2.2** Dada uma função $f$, diferenciável em $a$ e com derivada $D = f'(a)$, a equação da recta tangente ao gráfico é

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)\,.$$

Repare que a equação define uma recta com declive $f'(a)$ e que passa pelo ponto $(a, f(a))$.

**Exemplo 2.1** Considere a função $f(x) = x^2$ e o ponto $a = 1$. Temos

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{x^2-1^2}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}\,,$$

pelo que

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2\,.$$

Poderíamos alternativamente calcular o limite anterior utilizando a fórmula (2.2):

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-1}{h} =$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{1+2h+h^2-1}{h} = \lim_{h\to 0} 2+h = 2\,.$$

Finalmente, o valor de $D$ pode ainda ser obtido pela caracterização (2.3). Com efeito, escrevendo

$$x^2 = (x-1+1)^2 = 1 + 2(x-1) + (x-1)^2 = f(1) + 2(x-1) + (x-1)\cdot r(x-1)\,,$$

em que $r(x-1) = x-1$, observamos que é cumprida a condição (2.3) tomando $D = 2$.

Podemos concluir que a recta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto de abcissa $a = 1$ tem por equação

$$y = 2(x-1) + 1\,.$$

**Exemplo 2.2** Considere a função $f(x) = \sin(2x)$ e o ponto $a = 0$. Temos

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{x} =$$
$$2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x} = 2$$

(Na última igualdade utilizámos o limite notável $\lim_{y\to 0}\frac{\sin(y)}{y} = 1$ mudando a variável para $y = 2x$). Concluímos que no ponto $(0,0)$ pertencente ao gráfico da função $f$, a tangente tem por equação

$$y = 2x\,.$$

Consideramos agora uma função auxiliar de $f$ que, como veremos adiante, contem informação relevante sobre o seu comportamento.

**Definição.** Seja $f$ uma função definida num intervalo aberto $I$ tal que $f$ é diferenciável em todo o $x \in I$. Designamos por **função derivada** de $f$ a aplicação

$$\begin{aligned} f' : I &\mapsto \mathbb{R} \\ x &\curvearrowright \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \end{aligned}$$

**Observação** É também usual a notação $\dfrac{df}{dx}(a)$ para indicar a derivada de $f$ no ponto $a$ e $\dfrac{df}{dx}$ para indicar a função derivada de $f$. Esta notação realça a variável que percorre o domínio de $f$.

Simplificadamente, podemos dizer que a função derivada $f'$ associa a cada $x \in I$ o declive $f'(x)$ da recta tangente ao gráfico no ponto $(x, f(x))$.

**Exemplo 2.3** Considere $f(x) = x$. Qualquer que seja o ponto do gráfico de $f$, a recta tangente coincide com o gráfico de $f$, ou seja, com a recta $y = x$. Esta recta tem declive 1. Assim a função derivada de $f$ é a função constante

$$f'(x) = 1 \qquad (x \in \mathbb{R}) \, .$$

**Exercício** Verifique a afirmação anterior utilizando a definição (2.2).

**Exemplo 2.4** Considere $f(x) = x^2$. Fixemos $x \in \mathbb{R}$ e calculemos

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{(x^2 + 2xh - h^2) - x^2}{h} = 2x + h \, .$$

Assim

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} 2x + h = 2x \, .$$

Concluímos que no ponto de abcissa $x$, o gráfico de $f$ tem uma tangente com declive $2x$.

No teorema seguinte estabelecemos um resultado que generaliza os dois exemplos anteriores.

**Teorema 2.1** *Considere a função $f(x) = x^n$ com $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$. Então $f'(x) = nx^{n-1}$.*

**Dem.** Recordemos o desenvolvimento da expressão $(x+h)^n$ pelo binómio de Newton (tão belo quanto a Vénus de Milo, segundo o engenheiro Álvaro de Campos).

$$(x+h)^n = C_0^n x^n + C_1^n x^{n-1} h + C_2^n x^{n-2} h^2 + ... + C_n^n h^n \, .$$

Temos $C_0^n = 1$ e $C_1^n = n$. Podemos reescrever a equação anterior na forma:

$$(x+h)^n - x^n = nx^{n-1}h + h^2(C_2^n x^{n-2} + C_3^n x^{n-3}h + ... + C_n^n h^{n-2}) \, .$$

Obtemos então

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h} =$$
$$\frac{nx^{n-1}h + h^2(C_2^n x^{n-2} + C_3^n x^{n-3}h + ... + C_n^n h^{n-2})}{h} =$$
$$= nx^{n-1} + h(C_2^n x^{n-2} + C_3^n x^{n-3}h + ... + C_n^n h^{n-2}).$$

Observe que

$$\lim_{t\to 0} \; h(C_2^n x^{n-2} + C_3^n x^{n-3}h + ... + C_n^n h^{n-2}) = 0 \, ,$$

pelo que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = nx^{n-1} \, .$$

■

**Exercícios**

**1.** Considere a função $f(x) = x^2 + 2x$, $(x \in \mathbb{R})$. Determine a equação da recta tangente ao gráfico de $f$ no ponto $(-1,-1)$.

**2.** Considere a função

$$e(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 \qquad x \in \mathbb{R} \, .$$

Determine a equação da recta tangente ao gráfico de $p$ no ponto de abcissa zero. Averigúe a existência de rectas tangentes ao gráfico de $p$ com declive nulo.

**3.** Mesmo exercício para a função

$$s(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 \qquad x \in \mathbb{R} \, .$$

**4.** Considere a função $f(x) = x|x|$ $(x \in \mathbb{R})$. Verifique que $f$ é diferenciável em $x = 0$ e determine o valor da derivada.

**5.** Verifique que

$$\cos(x) - 1 = -\frac{\sin^2(x)}{\cos(x)+1} \, .$$

Utilize este facto para provar que a função $\cos(x)$ tem derivada nula em zero.

## 2.2 Propriedades da diferenciabilidade

O próximo teorema é uma consequência simples do Lema 1.9 sobre limites.

**Teorema 2.2** *Sejam $f$ e $g$ duas funções diferenciáveis em $a$. Então $f+g$ é diferenciável em $a$ e, sendo $k$ um número real, $kf$ é diferenciável em $a$. Temos*

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a) \qquad e \qquad (kf)'(a) = kf'(a)\,.$$

Tomemos, por exemplo, a função

$$f(x) = x^2 + 2x\,.$$

Trata-se de uma função diferenciável pois é a soma de duas funções diferenciáveis. Temos

$$f'(x) = (x^2)' + (2x)' = 2x + 2\,.$$

(ver exemplos 2.3, 2.4 ou exercício 3 da secção anterior).

De um modo geral, combinando o Teorema 2.1 e o Lema 2.2 obtemos a seguinte regra de derivação para polinómios em $\mathbb{R}$.

**Corolário 2.3** *Seja*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \,...\, + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

*um polinómio de grau $n$ definido em $\mathbb{R}$. Então $f$ é diferenciável em $\mathbb{R}$ e a sua função derivada é o polinómio de grau $(n-1)$:*

$$p'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + .... + a_2 x + a_1\,.$$

**Observação** Observe que duas funções distintas $f$ e $g$, diferenciáveis em $I$, podem possuir a mesma derivada. Tome o caso

$$f(x) = g(x) + k$$

em que $k$ é uma constante não nula. Temos, para todo o $x \in I$

$$f(x) \neq g(x) \quad \text{e} \quad f'(x) = g'(x)\,.$$

De facto, veremos adiante que, dadas duas funções $f$ e $g$, diferenciáveis em $I$, a condição $f'(x) = g'(x)$ para $x \in I$ equivale à condição $f(x) = g(x) + k$ em $I$ para uma certa constante $k \in \mathbb{R}$.

Clarifiquemos a relação entre a noção de diferenciabilidade e a noção de continuidade definida no capítulo anterior. Começemos com um exemplo:

**Exemplo 2.5** Seja $f(x) = |x|$. A função $f$ é contínua em 0 (Exemplo 1.13). Contudo, não é diferenciável em 0. Com efeito:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1\,, \tag{2.4}$$

e

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = -1\,. \tag{2.5}$$

Concluímos que $(f(x)-f(0))/x$ não tem limite em 0. A falha de diferenciabilidade causada pela diferença dos limites (2.4) e (2.5) traduz-se, neste caso, pela existência de um "ponto anguloso" do gráfico de $f$ em $(0,0)$.

No entanto, podemos afirmar

**Teorema 2.4** *Se uma função $f$ é diferenciável num ponto $a$ então ela é contínua em $a$.*

**Dem.** Utilizando a definição de diferenciabilidade em $a$ dada por (2.3), escrevemos

$$f(x) = f(a) + D(x-a) + (x-a)g(x-a)\,. \tag{2.6}$$

Observe agora que

$$\lim_{x\to a} D(x-a) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a} g(x-a) = 0 \tag{2.7}$$

(recorde que $\lim_{y\to 0} g(y) = 0$). Podemos concluir de (2.6) e (2.7)

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)\,,$$

ou seja que $f$ é contínua em $a$. ■

Concluímos do resultado anterior a diferenciabilidade de uma função $f$ num ponto requer à partida a continuidade de $f$ nesse ponto. Diz-se neste caso que a diferenciabilidade é uma noção mais "forte" do que a continuidade, no sentido em que a primeira implica a segunda.

Iremos agora deduzir a fórmula para a derivação do produto e da razão de duas funções. Alertamos desde já para o facto que, geralmente

$$(fg)' \neq f'g' \quad \text{e} \quad \left(\frac{f}{g}\right)' \neq \frac{f'}{g'}\,.$$

(compare $(x^2)'$ com $(x')\cdot(x')$ e $(x^2/x)'$ com $(x^2)'/x')$. De facto, tem-se:

**Teorema 2.5** *Sejam $f$ e $g$ duas funções diferenciáveis em $a$. Então:*

*(i) $fg$ é diferenciável em $a$ e*

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)\,.$$

*(ii) Se $f(a) \neq 0$ então $\frac{1}{f}$ é diferenciável em $a$ e*

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{f^2(a)}\,.$$

*(iii) Se $g(a) \neq 0$ então $\frac{f}{g}$ é diferenciável em $a$ e*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}\,.$$

**Dem.**
(i) Pretendemos estudar a existência do limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a)}{h}\,.$$

Somando e subtraindo a quantidade $f(a)g(a+h)$ ao nominador, obtemos:

$$\begin{aligned}
&\frac{f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a)}{h} = \\
&\frac{f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a+h) + f(a)g(a+h) - f(a)g(a)}{h} = \\
&g(a+h)\frac{f(a+h) - f(a)}{h} + f(a)\frac{g(a+h) - g(a)}{h}\,. \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

Justifiquemos que a expressão (2.8) tem limite em zero. Posto que a diferenciabilidade de $g$ em $a$ implica a sua continuidade em $a$, temos

$$\lim_{h\to 0} g(a+h) = g(a)\,.$$

Além disso, por hipótese de diferenciabilidade,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) \quad \text{e} \quad \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = g'(a)\,.$$

Assim, existe o limite definido em (2.2) e temos

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a)}{h} = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)\,.$$

(ii) Como $f(a) \neq 0$ e $f$ é contínua em $a$, podemos supor que $f$ está definida numa vizinhança $V = ]a-\delta, a+\delta[$ de $a$ tal que $f(x) \neq 0$ para todo o $x \in V$. Supondo $x \in V$, podemos escrever,

$$\frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a)}}{x-a} = \frac{1}{x-a}\left(f(a) - f(x)\right)\frac{1}{f(x)f(a)}\,.$$

Observe que

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{x-a}\left(f(a)-f(x)\right) = -f'(a) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)f(a)} = \frac{1}{f^2(a)}\,.$$

Podemos então concluir a existência do limite (2.1) e

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{f^2(a)}\,.$$

(iii) Aplicando as duas regras anteriores e reduzindo as expressões fraccionárias ao mesmo denominador, temos

$$\left(f\cdot\frac{1}{g}\right)'(a) = f'(a)\frac{1}{g(a)} + f(a)\left(-\frac{g'(a)}{g^2(a)}\right) = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}\,.$$

■

**Exemplos**

(i) A função polinomial de domínio $\mathbb{R}$ $f(x) = (1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3)(1-x)$ tem como derivada a função

$$f'(x) = (1+x+\frac{1}{2}x^2)(1-x) - (1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3) = -x-x^2-\frac{5}{6}x^3\,.$$

(ii) A função $f(x)=\frac{1}{x}$ tem como derivada a função $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$. O domínio de ambas as funções é $\mathbb{R}/\{0\}$.

(iii) A função $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$ tem derivada

$$f'(x) = \frac{(1+x^2)-x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\,.$$

(indique os domínios de $f$ e $f'$).

O resultado que segue generaliza a regra de derivação a potências negativas:

**Corolário 2.6** *Considere a função $f(x)=x^p$ com $p\in\mathbb{Z}^-$ e $x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Então $f$ é diferenciável em $x$ e*

$$f'(x) = px^{p-1}\,.$$

**Dem.** Posto que $p\in\mathbb{Z}^-$, escrevemos $p=-n$ em que $n\in\mathbb{N}$. Assim

$$f(x) = x^p = x^{-n} = \frac{1}{x^n}\,.$$

Aplicando a alinea (ii) do teorema anterior, temos

$$f'(x) = -\frac{nx^{n-1}}{(x^n)^2} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = (-n)x^{n-1-2n} = (-n)x^{(-n)-1}\,,$$

ou seja

$$f'(x) = px^{p-1}\,.$$

■

**Observação** Repare que o caso $p = 0$ não é tratado no teorema anterior. De facto, $x^0$ é a função constante igual a 1 pelo que a sua derivada é nula.

**Nota 2.3** *(diferenciabilidade de funções definidas por ramos)*
Seja $f$ uma função diferenciável no intervalo $]a, b[$. Dado $x_0 \in ]a, b[$, considere uma função $g$ e uma vizinhança $V = ]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[ \subset ]a, b[$ de $x_0$ tal que

$$g(x) = f(x) \qquad \forall x \in V\,.$$

Então $g$ é diferenciável em $x_0$ e temos

$$g'(x_0) = f'(x_0)\,.$$

Este facto tem uma justificação simples. Com efeito, para uma sucessão $x_n$ convergente para $a$, teremos, para certa ordem $p$

$$x_n \in V\,, \quad \forall n > p\,.$$

Assim:

$$g'(x_0) = \lim_{x_n \to x_0} \frac{g(x_n) - g(x_0)}{x_n - x_0} = \lim_{x_n \to x_0} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = f'(x_0)\,.$$

Uma consequência desta observação é a dedução da fórmula para a derivada de funções definidas por ramos. Por exemplo, considere

$$f(x) = \begin{cases} h(x) & \text{se } x < a, \\ w(x) & \text{se } x \geq a\,. \end{cases}$$

em que $h$ é diferenciável em $]-\infty, a[$ e $w$ é diferenciável em $]a, +\infty[$. Então $f$ é diferenciável em $]-\infty, a[ \cup ]a, +\infty[$ e

$$f'(x) = \begin{cases} h'(x) & \text{se } x < a, \\ w'(x) & \text{se } x > a\,. \end{cases}$$

No ponto $x = a$ nada podemos, a priori, garantir quanto à continuidade ou diferenciabilidade de $f$. Veremos adiante, como consequência de um teorema importante (Teorema de Lagrange), que a continuidade de $f$ e a existência de limites laterais coincidentes de $f'$ no ponto $a$ são suficientes para garantir a diferenciabilidade de $f$ em $a$.

**Exercícios**

**1.** Calcule a derivada em $x = 1$ de

$$p(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + (...) + x^{10}\,.$$

**2.** Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}\,.$$

Justifique que $f$ não é diferenciável em 0 (uma frase apenas).

**3.** Considere as funções $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = x^2 - 1$. Determine $(fg)'$ e $\left(\frac{f}{g}\right)'$ (indicando os domínios em que são válidas as derivadas).

**4.** Considere as funções $f$ e $g$ do exercício anterior. Defina

$$h(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se} \quad x < 0\,, \\ f(x)g(x) & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}\,.$$

Determine a função derivada de $h$ (estude a diferenciabilidade em zero).

**5.** Suponha que $f$, definida em $V = ]a - \epsilon, a + \epsilon[$ ($\epsilon > 0$), não é contínua em $a$. Justifique que existe uma sucessão $x_n$ convergente para $a$ em $V$ tal que

$$\lim_{x_n \to a} \left| \frac{f(x_n) - f(a)}{x - x_n} \right| = +\infty\,.$$

## 2.3 Derivadas de funções trigonométricas e exponencial

Nesta secção iremos estabelecer a derivada de funções já introduzidas no ensino secundário.

Começemos com as funções trigonométricas. É razoável que a derivada de uma função periódica seja ela também uma função periódica: se uma função $f(t)$ repete o seu padrão ao fim de um certo intervalo de tempo, também o devem fazer os declives $f'(t)$ das rectas tangentes ao seu gráfico.

**Teorema 2.7** *(Derivação de funções trigonométricas)*
*(i) A função* $\sin(x)$ *é diferenciável em* $\mathbb{R}$ *e a sua derivada é*

$$(\sin)'(x) = \cos(x)\,.$$

*(ii) A função* $\cos(x)$ *é diferenciável em* $\mathbb{R}$ *e a sua derivada é*

$$(\cos)'(x) = -\sin(x)\,.$$

*(iii) A função* $\tan(x)$ *é diferenciável em* $\mathbb{R}/\{\frac{\pi}{2} + k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\}$ *e a sua derivada é*

$$(\tan)'(x) = \sec^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}\,.$$

**Dem.**

(i) Começamos por recordar a fórmula trigonométrica

$$\sin(a) - \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\,.$$

Assim

$$\frac{1}{h}(\sin(x+h) - \sin(x)) = \frac{2}{h}\sin\left(\frac{h}{2}\right)\cos\left(\frac{x+x+h}{2}\right)\,.$$

Observe que

$$\lim_{h\to 0}\cos\left(\frac{x+x+h}{2}\right) = \cos(x)\,,$$

e que, pelo limite notável visto no Exemplo 1.11,

$$\lim_{h\to 0}\frac{2}{h}\sin\left(\frac{h}{2}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} = 1\,.$$

Logo

$$(\sin)'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(\sin(x+h) - \sin(x)) = \cos(x)\,.$$

(ii) Recordamos a fórmula trigonomérica

$$\cos(a) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\,.$$

Assim,

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(\frac{\pi}{2} - x - h) - \sin(\frac{\pi}{2} - x)}{h}.$$

Mudando para a variável $y = \frac{\pi}{2} - x$ podemos escrever o limite anterior

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(y-h) - \sin(y)}{h} = \lim_{h\to 0} -\frac{\sin(y-h) - \sin(y)}{-h} = -\cos(y) = -\sin(x)\,.$$

(iii) Observe que $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Assim

$$(\tan(x))' = \frac{(\sin)'(x)\cos(x) - \sin(x)(\cos)'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}\,.$$

■

**Nota 2.4** Dividindo a fórmula fundamental da trigonometria

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

por $\cos^2(x)$ obtemos

$$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)\,, \tag{2.9}$$

Podemos pois escrever

$$(\tan)'(x) = 1 + \tan^2(x)\,.$$

Observe que a função tangente satisfaz a seguinte equação

$$f'(x) = 1 + f^2(x)\,. \tag{2.10}$$

A equação anterior é dita "diferencial". A sua incógnita é uma função diferenciável. Por exemplo, as funções de tipo $\tan(x+c)$, em que $c$ é uma constante, são soluções de (2.10).

No próximo resultado relacionamos a derivada da função exponencial com o limite notável

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1\,. \tag{2.11}$$

**Teorema 2.8** *(Derivação da função exponencial)*
*Considere a função $f(x) = e^x$, definida em $\mathbb{R}$. Então $f$ é diferenciável e a sua derivada é*

$$f'(x) = e^x\,.$$

**Dem.** Por regras conhecidas das potências,

$$\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x\ \frac{e^h - 1}{h}\,.$$

Assim

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x = f'(x)\,.$$

■

A função exponencial coincide com a sua função derivada. Ela soluciona a equação diferencial

$$y'(x) = y(x)\,. \tag{2.12}$$

As funções que verificam (2.12) têm a seguinte propriedade: a ordenada de um ponto $P$ no gráfico de $f$ indica também o valor do declive da recta tangente. Existem outras funções que satisfazem (2.12). Por exemplo a função constante igual a zero. De facto pode-se demonstrar que todas as soluções são da forma:

$$y(x) = ce^x\,,$$

em que $c$ é uma constante real (os exemplos mencionados correspondem a $c = 1$ e a $c = 0$). Assim, o problema diferencial

$$y'(x) = y(x)\,, \qquad y(0) = c\,,$$

tem uma única solução para cada valor de $c$ fixado.

**Nota 2.5** O estudo da função exponencial remonta ao século $XVII$ quando foi estabelecido que, para funções de tipo $f(x) = a^x$, a derivada é de tipo $f(x) = ka^x$ em que $k$ é uma constante multiplicativa. A base $a$ que determina $k = 1$ é o numero irracional $e \simeq 2,718$, dito número de Neper.

Cabe ao português José Anastácio da Cunha a descoberta, em 1790, de que a função $e^x$ pode ser considerada um "polinómio infinito":

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^{2!} + \frac{1}{3!}x^3 + \quad ... \quad + \frac{1}{n!}x^n + ....$$

De facto, esta caracterização fundamental da função exponencial estabelece o limite notável

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1\,,$$

utilizado na dedução da derivada de $e^x$. No entanto, o estudo desta questão sai do âmbito do nosso curso. O aluno interessado poderá consultar o livro Introdução à Análise Matemática de J. Campos Ferreira.

Sugerimos que, com recurso a uma máquina de calcular gráfica ou a um programa de computador de matemática, compare, no intervalo $[-1, 1]$, os gráficos de $f(x) = e^x$ e dos polinómios

$$p_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 \quad \text{e} \quad p_5(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5\,.$$

Deste modo poderá constatar a pertinência do que acima foi dito.

Terminamos com um pequeno desafio: admitindo que pode derivar termo a termo o polinómio infinito

$$E(x) = x + \frac{1}{2}x^{2!} + \frac{1}{3!}x^3 + \quad ... \quad + \frac{1}{n!}x^n + ...\,,$$

verifique que

$$E'(x) = E(x)\,.$$

Como consequência dos resultados desta secção, podemos deduzir o seguinte

**Corolário 2.9** *(Continuidade de funções trigonométricas e exponencial) As funções* $\sin(x)$, $\cos(x)$ *e* $e^x$ *são contínuas em* $\mathbb{R}$. *A função* $\tan(x)$ *é contínua em* $\mathbb{R}/\{\frac{\pi}{2} + k\pi\,:\, k \in \mathbb{Z}\}$.

**Observação** Poderá parecer estranho a justificação da continuidade das funções trigonométricas e exponenciais a partir da propriedade de diferenciabilidade. De facto, a justificação da continuidade poderia fazer-se de modo independente. No entanto, importa referir que a diferenciabilidade é, do ponto de vista histórico, uma noção anterior à continuidade. Matemáticos do século XVII e XVIII admitiam implícitamente a existência de rectas tangentes aos gráficos de funções com que trabalhavam. No século XIX, o matemático alemão Karl Weierstrass formalizou a noção de continuidade e exibiu uma função que sendo contínua em todos os pontos de um intervalo, não era diferenciável em nenhum deles. O seu gráfico descreve uma linha em que o mesmo padrão estrelado (a lembrar o das fortificações abaluartadas de estilo Vauban) se repete a diversas escalas.

**Exercício** Pesquise na net imagens associadas à palavra "fractal". Poderá observar curvas contínuas que não admitem rectas tangentes em nenhum ponto.

**Exercícios**

**1.** Determine o domínio e a expressão da derivada das seguintes funções:

$$f_1(x) = x\sin(x) \quad ; \quad f_2(x) = \sin(2x) \quad ; \quad f_3(x) = \frac{\tan(x)}{e^x}\,.$$

(recorde que $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$)

**2.** Verifique que

$$\lim_{h\to 0}\frac{2^h - 1}{h} = \ln(2)\,.$$

(sugestão: escreva $2 = e^{\ln(2)}$. Utilize limite notável.)

**3.** Determine a função derivada de $f(x) = 2^x$.

**4.** Identifique os pontos em que a função $h(x) = |\sin(x)|$ não é diferenciável.

**5.** Compare no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ os gráficos de $f(x) = \sin(x)$ com o da função polinomial

$$p(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\,.$$

Sugira um polinómio de grau menor ou igual a quatro que aproxime a função $\cos(x)$ no mesmo intervalo.

## 2.4 Derivada da função composta.

Começemos por enunciar o teorema central desta secção.

**Teorema 2.10** *(Derivação da Função Composta)*

*Seja $g$ uma função diferenciável em $a$ e $f$ uma função diferenciável em $g(a)$. Então $f \circ g$ é diferenciável em $a$ e a sua derivada pode ser obtida através da fórmula*

$$(f \circ g)'(a) \;=\; f'[g(a)]g'(a)\,. \tag{2.13}$$

**Dem.**

Começamos por observar que existe uma vizinhança $V = ]a-\epsilon, a+\epsilon[$ de $a$ tal que $f \circ g : V \mapsto \mathbb{R}$ está definida em $V$ (veja, por exemplo, a demonstração do Lema 1.14). Pela hipótese da diferenciabilidade de $g$ e $f$ em $a$ e $g(a)$ respectivamente, podemos escrever, utilizando a caracterização de diferenciabilidade (2.3)

$$g(a+h) = g(a) + g'(a)h + hr_1(h)\,,$$

$$f[g(a)+k] = f[g(a)] + f'[g(a)]k + kr_2(k) \tag{2.14}$$

em que $r_i(s)$ $(i = 1, 2)$ verifica

$$\lim_{s\to 0} r_i(s) = 0\,.$$

Façamos $k = (g'(a)h + hr_1(h))$, de modo a que

$$g(a+h) = g(a) + k\,.$$

Substituindo em (2.14) (não se assuste com a expressão seguinte), obtemos:

$$\begin{aligned} f[g(a+h)] &= f\left[g(a) + (g'(a)h + hr_1(h))\right] = \\ &= f[g(a)] + f'[g(a)](g'(a)h + hr_1(h)) + (g'(a)h + hr_1(h))r_2(g'(a)h + hr_1(h)) = \\ &= f[g(a)] + f'[g(a)]g'(a)h + \rho(h)h \end{aligned} \tag{2.15}$$

em que

$$\rho(h) = f'[g(a)]r_1(h) + (g'(a) + r_1(h))r_2(g'(a)h + hr_1(h))\,.$$

Observe que $\rho(h)$ é tal que $\lim_{h\to 0}\rho(h) = 0$. Concluímos então que $f \circ g$ verifica a definição (2.3) com $L = f'(g(a))$ o que justifica a diferenciabilidade de função composta e a fórmula (2.13).

*No caso de colocarmos a hipótese adicional da função $g$ ser injectiva, podemos estabelecer a derivada da composta com um argumento mais imediato. Escrevemos*

$$\frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{h} = \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{g(a+h) - g(a)} \cdot \frac{g(a+h) - g(a)}{h}\,. \tag{2.16}$$

*(a hipótese técnica da injectividade visa garantir que o denominador $g(a+h) - g(a)$ é diferente de zero.) Como $g$ é diferenciável em $a$, temos*

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \;=\; g'(a)\,.$$

*Por outro lado, como $g(a+h) \to g(a)$ quando $h$ tende para zero (recorde que a diferenciabilidade implica a continuidade) temos*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{g(a+h) - g(a)} = \lim_{y \to g(a)} \frac{f(y) - f(g(a))}{y - g(a)} = f'[g(a)]\,.$$

*(operámos a substituição $y = g(a+h)$). Assim, resulta de (2.16) e dos limites anteriores que*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{h} = f'[g(a)]g'(a)\,,$$

*o que conclui a demonstração neste caso particular.* ■

**Exemplo** Considere a função polinomial $p(x) = (x^2+1)^{100}$. Podemos exprimir $p(x)$ como a composta de duas funções diferenciáveis em $\mathbb{R}$, i.e.

$$p(x) = f(g(x)) \qquad \text{em que } g(x) = x^2 + 1 \quad \text{e} \quad f(y) = y^{100}\,.$$

Temos

$$f'(y) = 100y^{99} \qquad \text{e} \qquad g'(x) = 2x\,.$$

Assim

$$p'(x) = f'(g(x))g'(x) = 100(x^2+1)^{99}2x\,.$$

**Exemplo** Considere a função $f(x) = 2^x$. Escrevemos

$$f(x) = \left(e^{\ln(2)}\right)^x = e^{\ln(2)x}\,.$$

Podemos derivar $f$ utilizando a regra da função composta.

$$f'(x) = e^{\ln(2)x}\,\ln(2) = \ln(2)\,2^x\,.$$

## Exercícios

**1.** Determine a derivada da função $f(x) = \sin(x^2)$.

**2.** Determine a derivada da função $f(x) = 3^x$.

**3.** Determine a derivada da função $f^3(x) + e^{f(x)}$ tomando como $f$ as funções utilizadas nos exercícios anteriores.

## 2.5 Derivada da função inversa.

Abordemos agora a questão da diferenciabilidade da função inversa. Recordamos que quando uma função $f : A \mapsto B$ é bijectiva podemos definir $f^{-1} : B \mapsto A$ através da relação

$$f^{-1}(y) = x \qquad \text{se e só se} \qquad y = f(x)\,.$$

A função $f^{-1}$ é designada por inversa de $f$ (atenção: não confunda $f^{-1}$, a inversa para a lei de composição de funções, com $\frac{1}{f(x)}$, a função inversa para o produto de funções). As funções estritamente monótonas são um caso particular de funções injectivas. No caso de funções **contínuas** num intervalo, resulta do Teorema do Valor Intermediário que a injectividade equivale à monotonia estrita. Convidamo-lo a rever a secção “Para ir um pouco mais longe” do capítulo anterior em que procedemos à caracterização da inversa de funções contínuas, estritamente monótonas em intervalos compactos.

**Teorema 2.11** *(Derivação da Função Inversa) Suponha $f$ estritamente monótona, contínua em $I = [a, b]$. Seja $x_0$ um ponto interior de $I$ tal que $f$ é diferenciável em $x_0$ e $f'(x_0) \neq 0$. Então a função inversa*

$$f^{-1} : [c, d] \mapsto [a, b] \qquad (c = \min\{f(a), f(b)\}\,,\ d = \max\{f(a), f(b)\})$$

*é diferenciável em $y_0 = f(x_0)$. Nesse ponto, a derivada pode ser obtida através da fórmula*

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) \ = \ \frac{1}{f'(x_0)}\,. \tag{2.17}$$

**Dem.**

Posto que $x_0 \in ]a, b[$, necessariamente $y_0 = f(x_0) \in ]c, d[$. Podemos então estudar o limite

$$\lim_{y \to f(x_0)} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(x_0))}{y - f(x_0)}\,.$$

Tomando uma sucessão $y_n \to f(x_0)$ com $\{y_n\} \subset [c, d]$, podemos escrever, pela continuidade da função inversa

$$y_n = f(x_n)\,, \qquad \text{em que} \quad x_n = f^{-1}(y_n) \quad \text{e} \quad x_n \to f^{-1}(f(x_0)) = x_0\,.$$

Assim

$$\begin{aligned}\lim_{y_n \to f(x_0)} \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(f(x_0))}{y_n - f(x_0)} &= \lim_{x_n \to x_0} \frac{f^{-1}(f(x_n)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(x_n) - f(x_0)} = \\ &= \lim_{x_n \to x_0} \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}\,.\end{aligned} \tag{2.18}$$

■

**Nota 2.6** Este resultado pode ser interpretado geometricamente. Recorde que o gráfico de $f$ e de $f^{-1}$ são simétricos em relação à bissectriz dos quadrantes ímpares. No ponto $(x_0, f(x_0))$, o gráfico de $f$ admite uma recta tangente $r$ com declive $f'(x_0)$. Por simetria, o gráfico de $f^{-1}$ admite uma recta tangente $r^*$ no ponto $(f(x_0), x_0)$. Observe que $r$ e $r^*$ são simétricas em relação à primeira bissectriz. Assim, os seus coeficientes directores são inversos (justifique). Concluímos que o declive de $r^*$ é $\dfrac{1}{f'(x_0)}$ ou

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) \;=\; \frac{1}{f'(x_0)}\,.$$

**Nota 2.7** A fórmula (2.17) é extensível ao caso de funções $f$ com domínios ou contradomínios não compactos.

**Exemplo 2.6** *(Derivada da função raíz quadrada)* A função raíz quadrada, que denotaremos aqui por $r(x)$, é definida como a a inversa da função

$$f : [0, +\infty[ \mapsto [0, +\infty[ \qquad x \curvearrowright x^2\,.$$

Observe que para todo o $x_0 > 0$, a função $f$ encontra-se nas condições do Teorema anterior. Podemos então calcular

$$f^{-1\prime}(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}\,,$$

ou

$$r'\left(x_0^2\right) = \frac{1}{2x_0}\,.$$

De modo a exprimir a derivada da raíz numa variável livre, operamos a mudança $y = x_0^2$ o que implica

$$x_0 = \sqrt{y}\,.$$

Podemos então escrever

$$r'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \quad \text{ou alternativamente} \quad \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,.$$

**Exemplo 2.7** *(Derivada da função raiz de ordem $n$)*

Dado $n \in \mathbb{N}$, considere a função

$$g(y) = \sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}}\,, \qquad y \geq 0\,.$$

A função $g$ é a inversa da função

$$f(x) = x^n \qquad x \geq 0\,.$$

Observe que, para $a > 0$, $f$ está nas condições do Teorema 2.11. Podemos então calcular a derivada $g'$ no conjunto dos reais positivos. Escrevemos, para $y = x^n$

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{nx^{n-1}}\,.$$

Mudando, no último membro, a variável para $y = x^n$ (ou equivalentemente $x = y^{\frac{1}{n}}$), temos:

$$g'(y) = \frac{1}{n\left(y^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}} = \frac{1}{ny^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n}\, y^{\frac{1}{n}-1}\,.$$

Alternativamente, escrevemos

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n}\, x^{\frac{1}{n}-1} \quad \text{ou} \quad \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = x^{\frac{1}{n}-1}\,.$$

**Exemplo 2.8** *(Derivada da função potência $x^\alpha$)*

Como consequência desta regra, podemos estabelecer que, para qualquer racional $r \neq 0$ e para qualquer $x > 0$

$$(x^r)' = rx^{r-1}\,.$$

Supondo $r = \dfrac{p}{q}$, escrevemos

$$x^r = (x^p)^{\frac{1}{q}}\ .$$

Aplicando a regra de derivação da função composta e o Exemplo 2.7, obtemos

$$(x^r)' = \left((x^p)^{\frac{1}{q}}\right)' = \frac{1}{q}\,(x^p)^{\frac{1}{q}-1}\,px^{p-1} = \frac{p}{q}\,x^{\frac{p}{q}-1}\,.$$

A regra permanece válida para $x^\alpha$ com $x > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}/\{0\}$. (A justificação do resultado geral sai do âmbito deste curso.)

**Exemplo 2.9** *(Derivada da função logaritmo logaritmo).*

A função $\ln(y)$ é a inversa da função exponencial $e^x$. Aplicando o Teorema 2.11, obtemos, para $x \in \mathbb{R}$,

$$(\ln)'\,(e^x) = \frac{1}{e^x}\,.$$

Mudando para a variável $y = e^x$, podemos concluir

$$(\ln)'\,(y) = \frac{1}{y}\,.$$

**Exemplo 2.10** *(Derivada das funções trigonométricas inversas)*

Consideremos a função

$$y \curvearrowright \arcsin(y)\,, \qquad y \in [-1, 1]\,,$$

a inversa da função seno restrita ao intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Sabemos que para $x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, temos $(\sin)'(x) = \cos(x) \neq 0$. Podemos aplicar o Teorema 2.11 e concluir, para $y = \sin(x)$,

$$\frac{d}{dy}(\arcsin)(y) = \frac{1}{(\sin)'(x)} = \frac{1}{\cos(x)}\,.$$

Observando que, pela fórmula fundamental da trigonometria (e pela hipótese $x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$), temos $\cos(x) = \sqrt{1-y^2}$, podemos concluir

$$(\arcsin)'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \qquad y \in ]-1, 1[\,.$$

Com um raciocínio semelhante se demonstra

$$(\arccos)'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \qquad y \in ]-1, 1[\,.$$

(convidamo-lo a verificar este resultado)

**Exercício** Verifique que para a função $y \curvearrowright \arctan(y)$ com $y \in \mathbb{R}$, tem-se

$$(\arctan)'(y) = \frac{1}{1+y^2}\,.$$

(utilize a relação $1/\cos^2(x) = 1 + \tan^2(x)$).

**Observação** A aprendizagem da matemática deve mais à compreensão do que ao simples decorar de factos, regras ou fórmulas. A compreensão suscita uma memória viva, disponível quando dela necessitamos.

No entanto, existem algumas excepções a este salutar princípio. Por exemplo, a aprendizagem da tabuada no ensino preparatório: a tabuada "bem sabida de trás para a frente" permite efectuar a multiplicação e divisão de números grandes.

Algo de comparável se passa com as regras de derivação. O aluno que automatiza o seu uso está mais apto a resolver problemas que envolvem o estudo de funções, livre de tropeções técnicos nos cálculos.

Importante: o conhecimento "instintivo" das regras de derivação permite efectuar a primitivação de funções, assunto ao qual nos dedicaremos no próximo capítulo.

### Exercícios

**1.** Verifique que $f(x) = 2x + \sin(x)$, definida em $\mathbb{R}$, admite inversa $f^{-1}$, diferenciável em $\mathbb{R}$. Determine $\left(f^{-1}\right)'(0)$.

**2.** Considere a função $g(x) = x^3 + 2$. Determine a função inversa $g^{-1}$ e indique os pontos em em $g^{-1}$ não é diferenciável. Verifique que $(3, 1)$ pertence ao gráfico de $g^{-1}$. Calcule $\dfrac{dg}{dy}(3)$ de dois modos distintos: derivando $g^{-1}$ em $y = 3$; usando o Teorema 2.11.

**3.** Considere a função definida no intervalo $[-1, 1]$ por

$$f(x) = \cos(\arcsin(x))\,.$$

Verifique que para $x \in ]-1, 1[$

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Obtenha esta fórmula de dois modos: a) Pelo Regra da derivada da função composta; b) mostrando que $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ e derivando.

**4.** Escreva, de memória, a derivada das funções exponencial, logaritmo e trigonométricas inversas. Confirme.

## 2.6 Aplicações da derivada ao estudo de funções.

Começamos por recordar a noção fundamental de máximo relativo.

**Definição.** Seja $f : I \mapsto \mathbb{R}$. Diremos que $f$ tem um **máximo relativo** em $x_0$ (ou que $f(x_0)$ é um máximo relativo de $f$) se e só se existir uma vizinhança $V = ]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[$ tal que

$$\forall x \in V \cap I\,, \qquad f(x) \leq f(x_0)\,. \tag{2.19}$$

No caso da propriedade anterior ser verdadeira para todo o $x \in I$, diremos que $f$ tem um máximo absoluto em $x_0$.

Se a segunda desigualdade em (2.19) fôr estrita, i.e.

$$\forall x \in\ (V \cap I)\backslash\{x_0\}\,, \qquad f(x) < f(x_0)\,. \tag{2.20}$$

diremos que $f$ tem em $x_0$ um máximo relativo estrito (ou absoluto).

De forma semelhante se definem as noções de **mínimo relativo** estrito (ou absoluto).

De um modo geral, diremos que $f$ tem em $x_0$ um **extremo relativo** quando atinge nesse ponto um máximo ou um mínimo relativo (eventualmente, absoluto ou estrito).

No caso das funções diferenciáveis, a ocorrência de um máximo (ou de um mínimo) num ponto interior de um intervalo implica que a recta tangente ao gráfico nesse ponto é horizontal. Este facto está na origem da descoberta da função derivada. Foi no contexto da procura de um tempo mínimo de trajecto para um raio de luz atravessando dois meios distintos que o matemático-advogado (sim, é verdade...) do século XVII, Pierre de Fermat, se lembrou de calcular a fórmula para os declives das rectas tangentes em todos os pontos de um gráfico.

**Teorema 2.12** *Seja $f$ uma função diferenciável em $]a, b[$ e suponha que $f$ atinge um máximo (ou mínimo) relativo em $c \in ]a, b[$. Então $f'(c) = 0$.*

**Dem.** Pela definição de máximo relativo, existe uma vizinhança $V = ]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[$ tal que

$$\forall x \in V\,, \qquad f(x) \leq f(c)\,.$$

Consideremos $(x_n)$ uma sucessão convergente para $c$ com termos em $V$ tal que $x_n > c$ para todo o $n \in \mathbb{N}$. Posto que

$$f(x_n) - f(c) \leq 0 \quad \text{e} \quad x_n - c > 0\,,$$

podemos concluir que

$$f'(c) = \lim_{x_n \to c^+} \frac{f(x_n) - f(c)}{x_n - c} \leq 0\,.$$

Por um raciocínio semelhante, se considerar-mos em $V$ uma sucessão $z_n \to c$ tal que $z_n < c$ concluímos que

$$f'(c) = \lim_{z_n \to c^-} \frac{f(z_n) - f(c)}{z_n - c} \geq 0\,.$$

Resulta das desiguladades anteriores que $f'(c) = 0$.

No caso de $f$ possuir um mínimo relativo em $x_0$, aplique a conclusão anterior à função $g(x) = -f(x)$. ■

**Nota 2.8** O anulamento da derivada num ponto não garante que este ponto seja extremo da função. Observe que no caso da função de finida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x^3$, a função derivada $f'(x) = 3x^2$ anula-se em zero. Porém, $f$ não tem máximo nem mínimo nesse ponto: a função cúbica é estritamente crescente no seu domínio.

Os pontos em que ocorre anulamento da derivada são designados **pontos estacionários**. Assim, no caso de função $f(x) = x^3$, zero é ponto estacionário mas não é extremo relativo.

**Nota 2.9** Pode ocorrer que uma função não seja diferenciável num extremo relativo. Por exemplo, considere a função $f(x) = |x^2 - 1|$. O gráfico de $f$ pode ser obtido a partir da parábola $y = x^2 - 1$ rebatendo o arco situado abaixo do eixo dos $x$ para o semi–plano superior $y \geq 0$. Nos pontos $-1$ e 1, a função $f$ tem dois mínimos absolutos. Mas $f$ não é diferenciável nesses pontos.

**Definição.** Uma função $f$ definida num intervalo $I$ diz-se crescente se e só se

$$\forall x_1,\, x_2 \in I \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)\,. \tag{2.21}$$

A função $f$ diz-se decrescente se e só se

$$\forall x_1,\, x_2 \in I \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)\,. \tag{2.22}$$

Observe que uma função constante é simultaneamente crescente e decrescente. Distinguiremos os casos

$$\forall x_1,\, x_2 \in I \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)\,. \tag{2.23}$$

e

$$\forall x_1,\, x_2 \in I \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)\,. \tag{2.24}$$

referindo que $f$ é estritamente crescente ou que $f$ é estritamente decrescente.

O estudo do sinal da função $f'$, derivada da função $f$, é da maior importância para a determinação dos intervalos em que $f$ é monótona (crescente ou decrescente) assim como dos pontos em que $f$ atinge máximos ou mínimos. Com efeito, observamos, que num intervalo $I$ em que a função $f$ é crescente, as rectas tangentes ao gráfico têm declives positivos (ou nulos) devendo por isso a derivada ser não-negativa em $I$. Uma conclusão análoga deve ser extraída para os intervalos em que $f$ decresce. Esta observação empírica será justificada com rigor mais adiante. Por ora, enunciaremos sem demonstração o seguinte:

**Teorema 2.13** *Seja $f$ uma função contínua no intervalo $[a,b]$ e diferenciável em $]a,b[$.*

(i) *Se $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) > 0$) para todo o $x \in ]a,b[$, então $f$ é crescente (estritamente) em $[a,b]$.*

(ii) *Se $f'(x) \leq 0$ ($f'(x) < 0$) para todo o $x \in ]a,b[$, então $f$ é decrescente (estritamente) em $[a,b]$.*

(iii) *Se $f'(x) = 0$ para todo o $x \in ]a,b[$, então $f$ é constante em $[a,b]$.*

**Nota 2.10** As conclusões formuladas no Teorema anterior de crescimento (decrescimento) estrito permanecem verdadeiras se admitirmos que $f'(x) > 0$ excepto num número finito de pontos do intervalo. Obviamente, o anulamento da função derivada num conjunto de pontos “massiço” impede a monotonia estrita da função: veja, por exemplo,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ x^2 & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

**Nota 2.11** Observe que no teorema anterior não é formulada qualquer hipótese sobre a existência de derivada nos extremos do intervalo. Por exemplo, a função $f(x) = \sqrt{x}$ é crescente em $[0, +\infty[$ por ser contínua e $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} > 0$ para todo o $x > 0$.

**Exemplo 2.11** Estudo da monotonia da função $f(x) = |x^2 - 1|$.

Observe que a função $f$ é contínua (trata-se da composta de duas funções contínuas). Podemos definir $f$ por ramos:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x^2 - 1 \geq 0, \\ 1 - x^2 & \text{se } x^2 - 1 < 0. \end{cases}$$

Assim

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x \leq -1, \\ 1 - x^2 & \text{se } -1 < x \leq 1, \\ x^2 - 1 & \text{se } 1 \leq x. \end{cases}$$

A função $f$ é diferenciável em $\mathbb{R}/\{-1, 1\}$ (ver Nota 2.3). Calculamos

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x < -1, \\ -2x & \text{se } -1 < x < 1, \\ 2x & \text{se } 1 < x. \end{cases}$$

Posto que $f$ é contínua em $]-\infty, -1]$ e $f'$ é estritamente negativa no interior deste intervalo podemos concluir que $f$ é estritamente decrescente em $]-\infty, 1]$. Por um raciocínio semelhante, podemos afirmar que $f$ é estritamente crescente no intervalo $[1, +\infty[$. Finalmente, $f'(0) = 0$ e

$$f'(x) > 0 \quad \text{se } x \in ]-1, 0[ \quad \text{e} \quad f'(x) < 0 \quad \text{se } x \in ]0, 1[\,.$$

Podemos então concluir que $f$ é crescente em $[-1, 0]$, decrescente em $[0, 1]$. Nos pontos $a = -1$ e $b = 1$ $f$ tem dois mínimos absolutos. Em $x = 0$ $f$ tem um ponto estacionário que é máximo relativo.

## Exercícios

**1.** Considere a função quadrática definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = ax^2 - bx$. Determine a abcissa do vértice da parábola que representa $f$ usando a derivada $f'$.

**2.** Estude os intervalos de monotonia de $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$.

**3.** Considere $f(x) = x^3 - ax + x$. Determine os valores de $a$ que tornam $f$ crescente.

**4.** Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$. Considere $g(x) = e^{f(x)}$. Verifique que $f$ e $g$ atingem os respectivos máximos e mínimos nos mesmos pontos de $[a, b]$.

**5.** Seja $f$ uma função definida em $[0, +\infty[$ verificando a relação diferencial

$$f'(x) = \sin(f(x)) \qquad f(0) = \frac{\pi}{2}\,.$$

Procure delimitar o contradomínio de $f$.

## 2.7 Aplicações da segunda derivada ao estudo de funções.

Nesta secção consideramos funções $f$ definidas num intervalo $I$ que possuem segunda derivada nos pontos interiores desse intervalo. Isto é, funções $f$ para as quais $f'$ é ela própria diferenciável. Nesse caso, denotamos

$$f'' := (f')'$$

e designamos $f''$ por "segunda derivada" de $f$.

O resultado seguinte é apenas uma adaptação do Teorema 2.13.

**Teorema 2.14** *Seja $f$ uma função duas vezes diferenciável em $]a, b[$.*

*(i) Se $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) > 0$) para todo o $x \in ]a, b[$, então $f'$ é crescente (estritamente) em $]a, b[$.*

*(ii) Se $f''(x) \leq 0$ ($f''(x) < 0$) para todo o $x \in ]a, b[$, então $f'$ é decrescente (estritamente) em $]a, b[$.*

*(iii) Se $f''(x) = 0$ para todo o $x \in ]a, b[$, então $f'$ é constante.*

**Nota 2.12** *(Convexidade, Concavidade)*

O crescimento da função $f'$ num intervalo aberto $I$ é designado por **convexidade** da função $f$ em $I$. Geometricamente, observa-se uma "concavidade voltada para cima" do seu gráfico. O decrescimento da função $f'$ em $I$ é designada por **concavidade** de $f$ em $I$. No seu gráfico observa-se uma "concavidade voltada para baixo". No caso de $f'$ ser constante num intervalo, então $f$ é uma função linear.

A convexidade de uma função duas vezes diferenciável num intervalo aberto $I$ pode ser caracterizada do seguinte modo (cuja justificação omitimos para já) :

Quando a segunda derivada é não negativa em $I$, o gráfico de $f$ está sempre por cima das rectas que lhe são tangentes.

Analíticamente, esta propriedade pode ser formulada do seguinte modo: para qualquer $x_0$ no interior de $I$, temos

$$f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \qquad \forall x \in I\,.$$

De forma equivalente, quando a segunda derivada é não positiva em $I$, o gráfico de $f$ está por baixo das rectas que lhe são tangentes, traduzindo-se analíticamente esta condição por

$$f(x) \leq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \qquad \forall x \in I\,.$$

Em certos casos, podemos fazer uso da segunda derivada num ponto estacionário para determinar a sua natureza.

**Teorema 2.15** *(Teste da segunda derivada)*
*Seja $f$ uma função duas vezes diferenciável numa vizinhança $V_\epsilon(x_0)$. Suponha que $f'(x_0) = 0$ e que $f''$ é contínua em $V_\epsilon(x_0)$.*

*(i) Se $f''(x_0) > 0$ então $f$ tem em $x_0$ um mínimo relativo estrito.*

*(ii) Se $f''(x_0) < 0$ então $f$ tem em $x_0$ um máximo relativo estrito.*

**Dem.** Faremos apenas a demonstração no caso (i) (o outro caso pode ser justificado de forma semelhante). Como $f''(x_0) > 0$ e $f''$ é contínua, podemos considerar uma vizinhança $V_{\epsilon'} \subset V_\epsilon(x_0)$ de $x_0$ tal que $f''(x) > 0$ para todo o $x \in V_{\epsilon'}$. Concluímos que $f'$ é estritamente crescente em $V_{\epsilon'}$. Em particular

$$f'(x) < 0 \quad \forall x \in ]x_0 - \epsilon', x_0[ \qquad \text{e} \qquad f'(x) > 0 \quad \forall x \in ]x_0, x_0 + \epsilon'[.$$

Assim $f$ é estritamente decrescente em $[x_0 - \epsilon, x_0]$ e estritamente crescente em $[x_0, x_0 + \epsilon]$. Em particular, possui um mínimo relativo estrito em $x_0$. ■

**Nota 2.13** Repare que o teste da segunda derivada não determina a natureza do ponto estacionário no caso de segunda derivade ser nula nesse ponto. Considere os exemplos

$$f_1(x) = x^4\,, \qquad f_2(x) = -x^4\,, \qquad f_3(x) = x^3\,.$$

Em todos eles verifica-se a condição $f_i'(0) = f_i''(0) = 0$ $(i = 1, 2, 3)$. No entanto, $f(0) = 0$ é um mínimo relativo de $f_1$, um máximo relativo de $f_2$ e não é mínimo nem máximo relativo de $f_3$.

Introduzimos a noção de ponto de inflexão de uma função.

**Definição.** Seja $f$ uma função duas vezes diferenciável num intervalo $I$ e seja $x_0$ um ponto interior de $I$. Diremos que $x_0$ é ponto de inflexão de $f$ se $x_0$ fôr um extremo relativo estrito de $f'$.

**Nota 2.14** Geralmente, detectamos um ponto de inflexão $x_0$ usando o seguinte critério:

$$f''(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad f'' \text{ troca de sinal em } x_0\,.$$

Por exemplo, o ponto zero é ponto de inflexão de $f(x) = x^3 + x$ mas não é ponto de inflexão de $g(x) = x^4$.

Geometricamente, num ponto de inflexão ocorre a alteração das concavidades do gráfico de $f$. Por exemplo, na trajectória de um motociclista, o ponto de inflexão corresponde, entre curva e contra curva, ao instante em que o motociclo passa pela posição de prumo.

**Exercícios**

**1.** Mostre que $-1$ e $1$ são pontos de inflexão da função definida em $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \ln(1 + x^2)\,.$$

**2.** Determine os pontos de inflexão da função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x^2 e^x$.

**3.** Mostre que qualquer polinómio de grau 3 possui um e um só ponto de inflexão. Para tal, considere um qualquer elemento da família dos polinómios de grau 3 representado pela expressão

$$p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad \text{em que} \quad a_3 \neq 0\,.$$

**4.** Considere uma função $f$ contínua em $[a, b]$, duas vezes diferenciável em $]a, b[$ tal que

$$f''(x) \leq 0\,, \qquad \forall x \in ]a, b[\,.$$

Suponha que em certo ponto $x_0 \in ]a, b[$ tem-se $f'(x_0) = 0$. Justifique que

$$f'(x) \leq 0\,, \qquad \forall x \in [x_0, b[\,.$$

O que pode concluir sobre a monotonia de $f$ em $[x_0, b]$? E em $[a, x_0]$?

**5.** Considere uma função $f$ contínua em $[a, b]$, duas vezes diferenciável em $]a, b[$ tal que

$$f''(x) \leq 0\,, \qquad \forall x \in ]a, b[\,. \quad \text{it sounds familiar...}$$

Justifique que $f$ não pode atingir um mínimo num ponto interior, a não ser que $f$ seja constante em $[a, b]$.

**6.** Considere uma função $f$ contínua em $[a, b]$, duas vezes diferenciável em $]a, b[$ tal que

$$f''(x) \leq 0\,, \qquad \forall x \in ]a, b[\,. \quad \text{já vi isto algures...}$$

Suponha que $f(a) = f(b) = 0$. Justifique que

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in ]a, b[ \qquad \text{ou} \qquad f(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b]\,.$$

## 2.8 Aplicações práticas da derivada.

### 2.8.1 A função logística.

Trataremos aqui de utilizar a análise matemática para estudar (e prever) um fenómeno descrito por uma lei de evolução (física, biológica, económica) que condiciona uma função real de variável real. Por exemplo, se considerar-mos o problema do crescimento de uma população, podemos considerar a função $P(t)$ que indica o número de indivíduos como função do tempo. Se admitir-mos um modelo em que $P$ é diferenciável (claro está, com reserva quanto ao significado de termos uma população de $10,3$ indivíduos num certo momento) é razoável formular a seguinte lei evolutiva

$$P'(t) = kP(t)\,, \tag{2.25}$$

em que $k$ é uma constante real. De facto, a taxa de crescimento de uma população (isto é, o número de nascimentos por unidade de tempo) é proporcional ao número de indívíduos que constituem essa população. Uma equação como (2.25) é designada por equação diferencial. A sua incógnita é uma função real de variável real diferenciável. No caso da equação (2.25), as soluções são funções de tipo

$$P(t) = P_0 e^{kt}\,,$$

em que $P_0$ é a população no instante $t = 0$. Todavia, este modelo pode ser aperfeiçoado. De facto, uma população biológica não aumenta para infinito: progressivamente, a escassez de alimentos limita a sua taxa de crescimento. Podemos então corrigir o modelo e formular a seguinte lei evolutiva:

$$p'(t) = \frac{k}{L} p(t)(L - p(t))\,. \tag{2.26}$$

A constante $L$ deve aqui ser interpretada como o limite superior para o número de indivíduos que o meio ambiente consegue suportar. A equação anterior é designada por equação logística ou de Verhulst. Para valores de $p(t)$ perto de zero, temos

$$\frac{k}{L}\, p(t)(L - p(t)) \approx kp(t)\,.$$

Neste caso a equação (2.26) assemelha-se fortemente à equação (2.25). Ou seja, quando a população é reduzida o crescimento é pouco condicionado pela existência de alimento: a lei de crescimento é de tipo exponencial. Porém, quando a população se aproxima do limite superior $L$, o segundo membro de (2.26) aproxima-se de zero. O crescimento populacional desacelera, tornando-se quase nulo. As soluções da equação (2.26) são funções de tipo

$$p(t) = \frac{L}{1 + Ae^{-kt}}\,.$$

No caso de um modelo populacional, a constante $A$ é positiva e determinada pelo valor de $p$ no instante inicial $t_0$. Estas funções são designadas por funções logísticas.

Justifiquemos parcialmente esta afirmação. Derivando $p$, obtemos

$$p'(t) = \frac{LAke^{-kt}}{(1 + Ae^{-kt})^2}\,. \tag{2.27}$$

Por outro lado, calculamos

$$\begin{aligned} \frac{k}{L}\, p(t)(L - p(t)) &= \frac{k}{L}\, \frac{L}{1 + Ae^{-kt}} \left( L - \frac{L}{1 + Ae^{-kt}} \right) = \\ \frac{k}{1 + Ae^{-kt}} \left( \frac{LAe^{-kt}}{1 + Ae^{-kt}} \right) &= \frac{LAke^{-kt}}{(1 + Ae^{-kt})^2}\,. \end{aligned} \tag{2.28}$$

De (2.27) e (2.28) podemos concluir que as funções $p(t)$ são soluções de (2.26). Não existem outro tipo de soluções de (2.26) para além das funções deste tipo (podendo, na sua maior generalidade, as constantes tomar valores em $\mathbb{R}$). Esta questão será abordada na segunda parte da matéria, através da noção de primitiva.

Observe que, sob as hipóteses $L > 0$, $k > 0$ e $A > 0$, tem-se

$$p'(t) > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}\,,$$

pelo que as funções logísticas são estritamente crescentes em $\mathbb{R}$. Estudemos agora as concavidades do seu gráfico. Utilizando a relação (2.26), calculamos

$$p''(t) = \left(\frac{k}{L}p(t)(L-p(t))\right)' = \frac{k}{L}\cdot\left[p'(t)(L-p(t)) - p(t)p'(t)\right]\,,$$

ou

$$p''(t) = \frac{k}{L}p'(t)(L-2p(t))\,.$$

Podemos então concluir, pelo crescimento estrito de $p(t)$, que

$$p''(t) > 0 \quad \text{se} \quad p(t) < \frac{L}{2} \qquad \text{(concavidade para cima)}\,,$$

e

$$p''(t) < 0 \quad \text{se} \quad p(t) > \frac{L}{2} \qquad \text{(concavidade para baixo)}\,.$$

Assim, existe um ponto de inflexão do gráfico de $p(t)$ no ponto $t_0$ tal que $p(t_0) = L/2$. Equivalentemente: a taxa de natalidade $p'(t)$ é máxima no instante $t_0$ em que a população atinge metade da capacidade $L$ do meio ambiente. Resolvendo

$$\frac{L}{1+Ae^{-kt}} = \frac{L}{2}\,,$$

obtemos $t_0 = \ln(A)/k$.

### 2.8.2 Problemas de optimização

1) **Optimização de um depósito cilíndrico.**

*Pretende-se construir um depósito de forma cilíndrica com um volume interno de um metro cúbico. O custo do depósito é determinado pela quantidade de material necessário à sua construção. Por sua vez, este depende da área exterior do depósito. A base circular e a superfície lateral (rectangular), sujeitas a maior pressão, são formadas por uma parede com um triplo da espessura da tampa circular. Quais as dimensões que minimizam o custo do depósito?*

Com vista à resolução analítica deste problema, começamos por traduzir os dados em linguagem matemática. A condição sobre a forma e volume do depósito escreve-se

$$\pi r^2 h = 1\,, \tag{2.29}$$

em que $r$ é o raio da base e $h$ é a altura do depósito. O custo $C$ do depósito é proporcional à quantidade de material empregue e portanto ao valor da seguinte "área ponderada":

$$C = 3(\pi r^2 + 2\pi r h) + \pi r^2 .$$

Observe que a expressão entre parêntesis representa a área da base e da superfície lateral. A multiplicação por três advem da condição da espessura da parede ser aí o triplo da espessura do tampo. A quantidade $C$ é geralmente uma função nas variáveis $r$ e $h$ que poderíamos escrever na forma $C(r,h)$. Todavia, a condição (2.29) impõe uma depêndencia das variáveis, a saber

$$h = h(r) = \frac{1}{\pi r^2} .$$

O custo $C$ pode então ser calculado apenas como função de $r$, o raio da base, através da fórmula

$$C(r) = 4\pi r^2 + 6\pi r \left(\frac{1}{\pi r^2}\right) = 4\pi r^2 + \frac{6}{r} .$$

Embora a função $C(r)$ esteja definida em $\mathbb{R}/\{0\}$, convem restringir o seu domínio a $\mathbb{R}^+$, onde a variável $r$ representa a medida positiva de um raio. Derivando, temos

$$C'(r) = 8\pi r - \frac{6}{r^2} = \frac{2}{r^2}(4\pi r^3 - 3) .$$

O sinal de $C'$ é determinado pelo sinal de $(4\pi r^3 - 3)$. Temos

$$C'(r_0) = 0 \Leftrightarrow 4\pi r_0^3 - 3 = 0 \Leftrightarrow r_0 = (4\pi/3)^{-\frac{1}{3}} .$$

Posto que $(4\pi r^3 - 1)$ é estritamente crescente na variável $r$, temos

$$4\pi r^3 - 1 < 0 \quad \text{para} \quad r < r_0 \qquad \text{e} \qquad 4\pi r^3 - 1 > 0 \quad \text{para} \quad r > r_0 .$$

Assim, a funcão $C$ decresce em $]0, r_0]$, cresce em $[r_0, +\infty[$ tendo em $r_0 = (4\pi/3)^{-\frac{1}{3}}$ o seu mínimo absoluto. As dimensões do depósito deverão ser

$$r_0 = (4\pi/3)^{-\frac{1}{3}} \approx\ 0,62\ m \qquad \text{e} \qquad h_0 = \pi^{-1}(4\pi/3)^{\frac{2}{3}} \approx\ 0,82\ m .$$

**Nota 2.15** *(Derivação Logarítmica)*

Introduzimos um método de cálculo de derivadas que será útil no exemplo seguinte. Este método é designado por derivação logarítmica.[1] Dada uma função

[1] Trata-se de um método útil na derivação de expressões que envolvem produtos, razões e potências. Recordamos as boas propriedades da função logaritmo: a função logaritmo converte produtos de números positivos em somas, divisões em subtracções, potências em multiplicação por escalar. Ora as regras de derivação para a soma, diferença ou multiplicação por escalar são bem mais simples do que as suas congéneres para o produto, razão ou potênciação.

positiva $h(t)$ temos, pela derivação da composta de duas funções,

$$(\ln(h(t)))' = \frac{h'(t)}{h(t)} .$$

Equivalentemente, podemos escrever

$$h'(t) = h(t)(\ln(h(t)))' . \tag{2.30}$$

Como supusemos $h(t)$ positiva, o sinal da derivada $h'$ (logo, a monotonia de $h$) é determinado pelo sinal da expressão

$$(\ln(h(t)))' .$$

Apliquemos esta técnica à função definida em $\mathbb{R}$

$$h(t) = \frac{2e^{-t}}{(1+2e^{-t})^2} .$$

Temos

$$\frac{h'(t)}{h(t)} = (\ln(h(t)))' = \left(\ln\left(\frac{2e^{-t}}{(1+2e^{-t})^2}\right)\right)' = \left(\ln(2) - t - 2\ln(1+2e^{-t})\right)' = \\ -1 + \frac{4e^{-t}}{1+2e^{-t}} = \frac{2e^{-t}-1}{1+2e^{-t}} \tag{2.31}$$

Assim

$$h'(t) = h(t)\frac{2e^{-t}-1}{1+e^{-t}} .$$

Posto que $h$ é positivo, o sinal de $h'(t)$ é determinado pelo sinal de

$$\frac{2e^{-t}-1}{1+e^{-t}} ,$$

ou, mais simplesmente, pelo sinal do denominador $(2e^{-t}-1)$ (porquê?).

2) **Optimização da área de um triângulo.**

*Pretende-se construir o triângulo isósceles de menor área contendo o círculo trigonométrico. Utilizaremos a hipótese das arestas do triângulo serem tangentes ao círculo.*

Seja $P := (\cos(\theta), \sin(\theta))$ um ponto do primeiro quadrante do círculo trigonométrico $\mathcal{C}$. Consideremos a recta $r$ tangente a $\mathcal{C}$ no ponto $P$. A recta $r$ intersecta o eixo das abcissas num ponto que denotaremos por $P_1$. Também intersecta a recta $x = -1$

num ponto que denotaremos por $P_2$ (sugerimos que faça um esboço). Seja $P_2'$ o simétrico de $P_2$ em relação ao eixo das abcissas. O triângulo $P_1P_2P_2'$ é isósceles, contem o círculo trigonométrico no seu interior, sendo as suas arestas tangentes a $\mathcal{C}$.

O nosso objectivo é encontrar o valor de $\theta \in ]0\ \frac{\pi}{2}[$ para o qual a área de $P_1P_2P_2'$ atinge um mínimo.

Por forma a calcular a área do triângulo como função de $\theta$, determinemos as coordenadas de $P_1$, $P_2$ e $P_2'$ como função de $\theta$. A recta $r$, tangente ao círculo trigonométrico no ponto $P$, tem como por equação cartesiana

$$(x - \cos(\theta))\cos(\theta) + (y - \sin(\theta))\sin(\theta) = 0$$

(recorde que a recta $r$ tem como vector normal $\overrightarrow{OP} = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ e passa em $P$). Simplificando:

$$\cos(\theta)x + \sin(\theta)y = 1\,.$$

A abcissa $x_1$ de $P_1$ é solução da equação

$$\cos(\theta)x_1 = 1 \qquad \text{ou} \qquad x_1 = \frac{1}{\cos(\theta)} = \sec(\theta)\,,$$

donde $P_1 = (\sec(\theta), 0)$. A ordenada $y_2$ de $P_2$ é solução da equação

$$(-1)\cos(\theta) + \sin(\theta)y_2 = 1\,,$$

ou

$$y_2 = \frac{1+\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \quad \text{donde} \quad P_2 = \left(-1, \frac{1+\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)\,.$$

A área do triângulo pode pois ser calculada através da fórmula

$$A(\theta) = \frac{1}{2}|P_2P_2'||P_1Q| = \frac{1+\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\left(\frac{1}{\cos(\theta)} + 1\right) = \frac{(1+\cos(\theta))^2}{\cos(\theta)\sin(\theta)}\,. \tag{2.32}$$

em que $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. O cálcula da derivada de $A$ é simplificado pelo uso da derivação logaritmítica. Temos

$$\ln(A(\theta)) = 2\ln(1+\cos(\theta)) - \ln(\cos(\theta)) - \ln(\sin(\theta))$$

(confirme que todos os termos da expressão estão bem definidos). Temos então, pela fórmula (2.30),

$$A'(\theta) = A(\theta)\left(\frac{-2\sin(\theta)}{1+\cos(\theta)} + \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} - \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)\,. \tag{2.33}$$

Posto que $A(\theta) > 0$, o sinal da derivada é determinado pelo sinal da expressão entre parêntesis. Somando as fracções e reagrupando termos, obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{-2\sin(\theta)}{1+\cos(\theta)}+\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}-\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}=\\
&=\frac{-2\sin^2(\theta)\cos(\theta)+\sin^2(\theta)+\sin^2(\theta)\cos(\theta)-\cos^2(\theta)-\cos^3(\theta)}{(1+\cos(\theta))\sin(\theta)\cos(\theta)}=\\
&=\frac{-\sin^2(\theta)\cos(\theta)-\cos^2(\theta)-\cos^3(\theta)+\sin^2(\theta)}{(1+\cos(\theta))\sin(\theta)\cos(\theta)}=\\
&=\frac{-(\sin^2(\theta)+\cos^2(\theta))\cos(\theta)+\sin^2(\theta)-\cos^2(\theta)}{(1+\cos(\theta))\sin(\theta)\cos(\theta)}=\\
&=\frac{-\cos(\theta)+\sin^2(\theta)-\cos^2(\theta)}{(1+\cos(\theta))\sin(\theta)\cos(\theta)}\,. \qquad (2.34)
\end{aligned}$$

Posto que o denominador de (2.34) é positivo (recorde que $\theta\in]0\,,\,\pi/2[$) estudamos o sinal do nominador

$$f(\theta)=-\cos(\theta)+\sin^2(\theta)-\cos^2(\theta)\,,$$

que, através da fórmula fundamental da trigonometria, se converte em

$$f(\theta)=-2\cos^2(\theta)-\cos(\theta)+1\,.$$

Observe que $f$ é a composição da função coseno (restrita a $]0,\frac{\pi}{2}[$) com a função quadrática $g(x)=-2x^2-x+1$. A função $g$ tem concavidade voltada para baixo e anula-se em

$$x_0=-\frac{1+\sqrt{9}}{4}=-1 \qquad \text{e} \qquad x_1=-\frac{1-\sqrt{9}}{4}=\frac{1}{2}\,.$$

Assim, $g$ é positiva em $]x_0,x_1[$ e negativa em $\mathbb{R}/\{[x_0,x_1]\}$. Fazendo $x=\cos(\theta)$, podemos pois afirmar

$$f(\theta)=g(\cos(\theta))>0 \quad \text{para} \quad 0<\cos(\theta)<\frac{1}{2}\,, \quad \text{ou} \quad \theta\in\left]\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right[\,,$$

e

$$f(\theta)<0 \quad \text{para} \quad \frac{1}{2}<\cos(\theta)<1\,, \quad \text{ou} \quad \theta\in\left]0,\frac{\pi}{3}\right[\,.$$

A função $A(\theta)$ é decrescente em $]0,\frac{\pi}{3}[$, crescente em $]\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}[$, atingindo o seu mínimo absoluto em $\theta=\frac{\pi}{3}$.

Convidamo-lo a verificar que o triângulo correspondente a $\theta=\frac{\pi}{3}$ é equilátero.

### 2.8.3 Caminhos em $\mathbb{R}^2$

Um caminho em $\mathbb{R}^2$ é uma aplicação $f$, de um intervalo $I$ de $\mathbb{R}$ para o plano $\mathbb{R}^2$, i.e.

$$\gamma: I\mapsto\mathbb{R}^2 \qquad t\curvearrowright(\gamma_1(t),\gamma_2(t))\,.$$

As funções $\gamma_1\,,\gamma_2\ : I \mapsto \mathbb{R}$, são designadas por funções componentes de $\gamma$. Diremos um caminho $\gamma$ contínuo em $I$ se ambas as funções $\gamma_1$ e $\gamma_2$ forem contínuas em $I$.

**Exemplo** O gráfico de uma função $g : I \mapsto \mathbb{R}$ real é a imagem do caminho

$$\gamma : I \mapsto \mathbb{R}^2 \qquad t \curvearrowright (t, g(t))\,.$$

Designamos por **trajecto** a imagem de um caminho, isto é o subconjunto do plano

$$\gamma(I) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \exists t \in I \quad \text{tal que} \quad x = t \text{ e } y = g(t)\}\,.$$

Caminhos distintos podem possuir o mesmo trajecto. Por exemplo, os caminhos

$$h(t) = (t^3, t^6) \quad \text{e} \quad w(t) = (t, t^2) \qquad \text{para } t \in [0, 1]$$

efectuam o mesmo trajecto, neste caso, seguindo a parábola $y = x^2$, embora para $t \in ]0, 1[$ tenhamos $h(t) \neq w(t)$. Se $t$ designar uma variável temporal, um caminho descreve o movimento seguido por uma partícula. Assim, o comentário anterior traduz a ideia que duas partículas distintas podem efectuar o mesmo trajecto com "velocidades diferentes".

Quando as funções componentes de um caminho são $k$-vezes diferenciáveis com a $k$-ésima derivada contínua, o caminho $\gamma$ diz-se de classe $C^k$.

**Definição.** Seja

$$\gamma : I \mapsto \mathbb{R}^2 \qquad t \curvearrowright (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$$

um caminho de classe $C^1$ e $t_0$ um ponto interior a $I$. Designamos por velocidade de $\gamma$ no ponto $t_0$ o **vector**

$$\gamma'(t_0) = (\gamma_1'(t_0), \gamma_2'(t_0))\,.$$

Observe que $\gamma'$ é também uma aplicação de $I$ em $\mathbb{R}^2$. O facto de a designarmos por vector está relacionado com a interpretação física desta aplicação. Se colocarmos a origem do vector livre $\vec{v} = (\gamma_1'(t_0), \gamma_2'(t_0))$ no ponto $\gamma(t_0) = (\gamma_1(t_0), \gamma_2(t_0))$ observamos que $\vec{v}$ é tangente ao trajecto nesse ponto e conserva o sentido do movimento. Note-se que na linguagem quotidiana, a palavra "velocidade" não designa o vector $\vec{v}$ mas sim o seu módulo $\|\vec{v}\|$.

**Exemplo 2.12** *(movimento circular uniforme)*

Considere uma partícula $P$ cujo movimento é descrito pelo caminho

$$P(t) = (\cos(t), \sin(t)) \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

A partícula move-se ao longo do círculo trigonométrico. Por exemplo, no instante $t = \frac{\pi}{3}$, ela encontra-se no ponto

$$P\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\,.$$

Calculemos o vector velocidade nesse instante.

$$\vec{v}\left(\frac{\pi}{3}\right) = P'(t)|_{t=\frac{\pi}{3}} = (-\sin(t), \cos(t))|_{t=\frac{\pi}{3}} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) .$$

O vector $\vec{v}$ é perpendicular ao vector $\vec{OP}$ sendo por isso tangente à trajectória circular quando colocamos a origem de $\vec{v}$ em $P$. Observe que, qualquer que seja o instante considerado, resulta da fórmula fundamental da trigonometria

$$\|\vec{v}(t)\| = \|(-\sin(t), \cos(t))\| = \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2} = 1 ,$$

ou seja, a norma do vector velocidade permanece constante. Trata-se do movimento circular uniforme, tal como pode ser experimentado num carrossel. A segunda derivada

$$\vec{a}(t) = P''(t) = -(\cos(t), \sin(t)) ,$$

que é colinear ao vector posição no instante $t$, mas de sentido oposto, determina a aceleração na partícula exercida nesse instante. Tentemos tornar sensível o vector aceleração. Um indíviduo sentado num automóvel que acelera ao longo de uma linha recta experimenta a reacção das costas do assento: trata-se de uma força aparente com mesma direcção e intensidade que a aceleração a que está sujeito, mas de sentido contrário. Do mesmo modo, um indíviduo em movimento circular uniforme experimenta uma força aparente que o comprime contra o apoio fornecido pelo carrossel, com a mesma intensidade $\|\vec{a}(t)\|$, mas de sentido contrário. Este princípio é utilizado na preparação dos astronautas para a tremenda aceleração da descolagem de um foguetão: em fase de treino, os astronautas são, literalmente, centrifugados em carrosseis construídos para esse efeito.

## 2.9 Teoremas de Rolle e Lagrange.

Nesta secção aprofundamos o estudo teórico da noção de derivada. Dele decorrerá uma justificação mais cuidada da relação entre o sinal de $f'$ e a monotonia de $f$. Aplicaremos alguns dos resultados na obtenção de desigualdades e na resolução de limites indeterminados. Comecemos com o

**Teorema 2.16** *(Teorema de Rolle) Seja $f$ uma função contínua em $[a, b]$, diferenciável em $]a, b[$, tal que $f(a) = f(b)$. Então existe $c \in ]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.*

**Dem.** Como $f$ é contínua em $[a, b]$, podemos concluir, pelo Teorema 1.17, que $f$ atinge um mínimo $m$ e um máximo $M$ em $[a, b]$. Caso $M = m$ então a função $f$ é constante. Em particular, $f'$ anula-se em qualquer ponto de $]a, b[$.

Supondo agora que

$$M > f(a) \geq m ,$$

(o caso $m < f(a) \leq M$ é semelhante) concluímos que o máximo é atingido num ponto interior $c$. Pelo Teorema 2.12, temos $f'(c) = 0$ o que conclui a demonstração.

■

O Teorema de Rolle pode ser extendido ao seguinte caso geral em que não se especifica o valor de $f$ nos extremos do intervalo $[a,b]$.

**Teorema 2.17** *(Teorema de Lagrange)*
*Seja $f$ uma função contínua em $[a,b]$, diferenciável em $]a,b[$. Então existe $c \in ]a,b[$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,. \tag{2.35}$$

**Dem.** Considere a função auxiliar

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(a)\,.$$

A função $h$ é contínua em $[a,b]$ e diferenciável em $]a,b[$. [2] Observe que

$$h(a) = h(b) = 0\,,$$

pelo que $h$ se encontra nas condições de Teorema de Rolle. Logo existe $c \in ]a,b[$ tal que $h'(c) = 0$ ou

$$f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0\,.$$

■

Podemos agora demonstrar a alinea $(i)$ do Teorema 2.13 cujo enunciado recordamos :

*Seja $f$ uma função contínua no intervalo $[a,b]$ e diferenciável em $]a,b[$.*

(i) *Se $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) > 0$) para todo o $x \in ]a,b[$, então $f$ é crescente (estritamente) em $[a,b]$.*

(ii) *Se $f'(x) \leq 0$ ($f'(x) < 0$) para todo o $x \in ]a,b[$, então $f$ é decrescente (estritamente) em $[a,b]$.*

(iii) *Se $f'(x) = 0$ para todo o $x \in ]a,b[$, então $f$ é constante em $[a,b]$.*

**Dem.**
(i) Sejam $x_1, x_2 \in [a,b]$ tais que $x_1 < x_2$. Pretendemos verificar que $f(x_2) > f(x_1)$. A função $f$ verifica as condições do Teorema de Lagrange no intervalo $[x_1,x_2]$. Podemos concluir a existência de $c \in ]x_1,x_2[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\,,$$

[2] De facto, $h$ é obtido subtraindo a $f$ a função linear cujo gráfico passa em $(a,f(a))$ e $(b,f(b))$.

ou

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)\,.$$

Posto que $f'(c) \geq 0$ ($f'(c) > 0$) e $(x_2 - x_1) > 0$ podemos concluir

$$f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \quad (> 0) \qquad \text{ou} \qquad f(x_2) \geq f(x_1) \quad (f(x_2) > f(x_1))\,.$$

(ii) resulta da alinea anterior aplicada à função $g = -f$.

(iii) Seja $x_1 \in ]a, b]$. Aplicando o teorema de Lagrange em $[a, x_1]$ obtemos, para um $c \in ]a, x_1[$

$$f(x_1) - f(a) = f'(c)(x_1 - a) = 0 \qquad \text{ou} \quad f(x_1) = f(a) \quad \forall x_1 \in ]a, b]\,.$$

■

**Nota 2.16** Dadas duas funções $f$ e $g$ contínuas em $[a, b]$, diferenciáveis em $]a, b[$, tais que $f' = g'$ em $]a, b[$, então, para uma certa constante $h$,

$$f(x) = g(x) + h \qquad \forall x \in [a, b],.$$

Para justificar esta afirmação, considere-se a função auxiliar

$$h(x) = f(x) - g(x).$$

Posto que $h'(x) = 0$ para todo o $x \in ]a, b[$, temos por (iii) do resultado anterior,

$$h'(x) = h \qquad \text{para um certo } h \in \mathbb{R}\,,$$

o que conclui a justificação.

De um modo geral, se $f$ e $g$ forem funções $n$-vezes contínuamente diferenciáveis em $[a, b]$ tais que $f^{(n)} = g^{(n)}$ então

$$f(x) = g(x) + p_{n-1}(x)\,,$$

em que $p_{n-1}$ é polinómio de grau menor ou igual a $n - 1$.

**Exemplo 2.13** Vamos justificar a seguinte desigualdade (que foi utilizada no Exemplo 1.11):

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\,, \qquad \tan(x) > x\,. \tag{2.36}$$

Para tal, consideramos a função auxiliar

$$h(x) = \tan(x) - x\,,$$

contínua em $[0, \pi/2[$ e diferenciável em $]0, \pi/2[$ com derivada

$$h'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} - 1\,.$$

Para $x \in ]0, \pi/2[$, temos

$$0 < \cos^2(x) < 1 \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{\cos^2(x)} > 1\,,$$

pelo que $h'(x) > 0$. Fixemos $x_1 \in ]0, \frac{\pi}{2}[$. Pelo Teorema 2.13, $h$ é estritamente crescente no intervalo $[0, x_1]$. Em particular

$$h(x_1) = \tan(x_1) - x_1 > h(0) = 0 \quad \text{ou} \quad \tan(x_1) > x_1\,.$$

Como a escolha de $x_1$ é arbitrária, a desigualdade (2.36) é válida em todo o ponto do intervalo $]0, \frac{\pi}{2}[$.

**Exemplo 2.14** *(Estudo da convexidade)*
Seja $f$ uma função duas vezes diferenciável num intervalo aberto $I$ tal que

$$f''(x) \geq 0$$

para todo o $x \in I$. Demonstremos a propriedade de convexidade já enunciada: para qualquer $x_0$ no interior de $I$, temos

$$f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \qquad \forall x \in I\,.$$

Recordamos que geometricamente esta propriedade traduz-se no facto do gráfico de $f$ permanecer acima das rectas que lhe são tangentes. Para simplificar, suporemos $I = ]a, b[$ com $a, b \in \mathbb{R}$. Considere-se a função auxiliar

$$h(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)\,.$$

Derivando, obtemos

$$h'(x) = f'(x) - f'(x_0)\,.$$

Posto que $f'' \geq 0$, concluímos que $f'$ é crescente em $I$. Assim, para $x \in I$

$$h'(x) \leq 0 \quad \text{se } x \leq x_0 \quad \text{e} \quad h'(x) \geq 0 \quad \text{se } x \geq x_0\,.$$

Concluímos que $h$ é decrescente em $]a, x_0]$ e crescente em $[x_0, b[$, tendo por isso um mínimo absoluto em $x_0$. Isto é

$$h(x) \geq h(x_0) = 0\,,$$

ou, equivalentemente,

$$f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \qquad \forall x \in I\,.$$

O seguinte Corolário do Teorema de Lagrange é útil no estudo da diferenciabilidade de funções definidas por ramos.

**Corolário 2.18** *Seja $f$ uma função contínua em $x_0$ e diferenciável em* $]x_0-\epsilon, x_0+\epsilon[\setminus\{x_0\}$. *Se existir*

$$\lim_{x\to x_0} f'(x) := L\,,$$

*então $f$ é diferenciável em $x_0$ e $f'(x_0)=L$.*

**Dem.** Pretendemos verificar a existência do limite

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\,.$$

Começamos por provar a existência de derivada lateral à direita de $x_0$. Supondo $x\in]x_0, x_0+\epsilon[$, observamos que $f$ verifica as condições do teorema de Lagrange no intervalo $[x_0, x]$ pelo que existe $c_x\in]x_0, x[$ tal que

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(c_x)\,.$$

Dada uma sucessão $x_n\to x_0^+$, existe uma sucessão $(c_n)$ enquadrada entre $x_0$ e $x_n$ tal que

$$\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}=f'(c_n)\,.$$

A sucessão $c_n$ é convergente para $x_0$, pelo que, pelas condições do enunciado

$$L=\lim_{c_n\to 0} f'(c_n)=\lim_{x_n\to x_0^+}\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}\,.$$

Provámos assim a diferenciabilidade à direita de $f$ em $x_0$. Da mesma forma se demonstra

$$\lim_{x_n\to x_0^-}\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}=L\,.$$

■

**Exemplo 2.15** Considere a função

$$f(x)=\begin{cases}\sin(x) & \text{se } x\le 0\\ \ln(1+x) & \text{se } x>0\,.\end{cases}$$

A função $f$ é contínua em 0 posto que

$$\lim_{x\to 0^-}\sin(x)=\lim_{x\to 0^+}\ln(1+x)=0=f(0)\,.$$

Temos também , para $x \neq 0$,

$$f'(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{1}{1+x} & \text{se } x > 0\,. \end{cases}$$

Observe que

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{1+x} = 1\,,$$

e que

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} \cos(x) = 1\,.$$

Estamos pois nas condições do Corolário 2.18. Concluímos que $f$ é diferenciável em 0 e $f'(0) = 1$.

**Exemplo 2.16** O corolário anterior fornece uma condição suficiente para a diferenciabilidade em $x_0$. Porém, não se trata de uma condição necessária. Uma função $f$ pode ser diferenciável num ponto $x_0$ sem que a função $f'$ seja contínua em $x_0$. Considere o seguinte exemplo.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{se}\, x \neq 0 \\ 0 & \text{se}\, x = 0\,. \end{cases}$$

Verifiquemos que $f$ é diferenciável em zero. Com efeito, pelo Exemplo 1.10,

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \, x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0\,.$$

No entanto, calculando a derivada em $x \neq 0$, obtemos

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^2 \frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\,.$$

Observe que $f'(x)$ não tem limite em zero. Considere pare esse efeito a sucessão $x_n = 1/(n\pi)$ convergente para zero e verifique que $f(x_n)$ tem uma subsucessão convergente para 1 e uma subsucessão convergente para $-1$.

**Nota 2.17** *(Funções de classe $C^k([a, b])$.)*

Dada uma função diferenciável $f$ em $]a, b[$, contínua em $[a, b]$, diremos que $f$ é de classe $C^1$ em $[a, b]$ (e denotamos $f \in C^1([a, b])$ se a função $f'$ é contínua em $]a, b[$, podendo ser prolongada por continuidade aos extremos do intervalo (mais simplesmente, diremos "$f'$ contínua em $[a, b]$"). Facilmente se prova, adaptando o argumento essencial do Corolário 2.18 que, nesse caso, $f$ tem derivadas laterais em $a$ e $b$ verificando-se

$$f'(a^+) := \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a^+} f'(x)\,,$$

e

$$f'(b^-) := \lim_{h\to 0^-} \frac{f(b+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\to b_-} f'(x)\,.$$

De um modo geral, supondo que uma função $f$ admite derivada até à ordem $k \in \mathbb{N}$ em todos os pontos de $I$, designamos por $f^{(j)}$ a função derivada de ordem $j$ para todo o $0 \leq j \leq k$ (assumindo que $f^{(0)} \equiv f$). Diremos que $f$ é de classe $C^k$ em $[a, b]$ (ou que "$f$ é $k$-vezes contínuamente diferenciável em $[a, b]$") se $f^{(k)}$ fôr contínua em $[a, b]$. Denotamos por $C^k \in ([a, b])$ a família de funções $k$-vezes contínuamente diferenciáveis.

### Exercícios

**1.** Justifique, utilizando o Teorema de Rolle, a existência de dois pontos estacionários para a função seno no intervalo $[0, 2\pi]$.

**2.** Considere uma função $f$ diferenciável em $\mathbb{R}$, periódica com período $T$. Justifique a existência de pelo menos dois pontos estacionários no intervalo $]0, T]$.

**3.** Considere a função

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R} \qquad x \curvearrowright x^3 - x^2 + x\,.$$

Verifique que $f$ está nas condições do Teorema de Lagrange e determine o valor intermediário $c$ nele referido.

**4.** Considere a seguinte função definida por ramos

$$f(x) = \begin{cases} \arctan 2x & \text{se } x < 0\,, \\ \tan(2x) & \text{se } 0 \leq x < \frac{\pi}{4}\,. \end{cases}$$

Estude a diferenciabilidade de $f$ em zero.

**5.** Suponha $f$ diferenciável num intervalo aberto $I$. Considere $[a, b] \subset I$ tal que

$$f'(a) > 0 > f'(b)\,.$$

Justifique a existência de $c \in ]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.
(sugestão: averigúe a existência de um ponto interior de máximo)

**6.** Suponha $f$ diferenciável num intervalo aberto $I$. Justifique que $f'$ goza da propriedade do valor intermediário (Teorema de Darboux). Reveja o Exemplo 2.16 à luz deste resultado.

## 2.10 A regra de Cauchy

Nesta secção veremos como a noção de diferenciabilidade pode contribuir para o levantamento de indeterminações em limites. Começamos por apresentar outra variante do teorema de Rolle.

**Teorema 2.19** *Sejam $f, g$ funções contínuas em $[a, b]$ e diferenciáveis em $]a, b[$ tais que*

$$g'(x) \neq 0 \qquad \forall x \in ]a, b[\,.$$

*Então existe $c \in ]a, b[$ tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\,. \tag{2.37}$$

**Dem.** Repare que a hipótese $g'(x) \neq 0$ para todo o $x \in ]a, b[$ garante, em virtude do teorema de Rolle, que $g(a) \neq g(b)$. A expressão (2.37) encontra-se pois bem definida.

Considere a função auxiliar[3]

$$h(x) = f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a))\,.$$

A função $h$ é contínua em $[a, b]$, diferenciável em $]a, b[$ e verifica

$$h(a) = h(b) = f(a)g(b) - f(b)g(a)\ .$$

Pelo Teorema de Rolle, existe $c \in ]a, b[$ tal que

$$h'(c) = f'(c)(g(b) - g(a)) - g'(c)(f(b) - f(a)) = 0\,.$$

Posto que $g'(c) \neq 0$, concluímos

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\,.$$

■

Uma consequência do Teorema de Cauchy é o seguinte

**Corolário 2.20** *Suponha $f$ e $g$ contínuas em $V := [a, a + \epsilon[$, diferenciável em $]a, a + \epsilon[$ com $g'(x) \neq 0$ em $]a, a + \epsilon[$. Suponha que*

$$f(a) = g(a) = 0 \quad e \quad \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L\,. \tag{2.38}$$

*Então existe o limite $\lim_{x \to a^+} f(x)/g(x)$ tendo-se*

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L\,.$$

[3]Repare que a função $h$ é da forma $h(x) = \alpha f(x) - \beta g(x)$ tendo as constantes $\alpha$ e $\beta$ sido escolhidas de modo a que $\alpha \neq 0$ e que $h$ estivesse nas condições do Teorema de Rolle. Confirme que outras escolhas de $\alpha$ e $\beta$ teriam conduzido ao mesmo resultado.

**Dem.** Considere uma qualquer sucessão $(x_n)$ convergente para $a^+$ por valores diferentes de $a$. Aplicando o Teorema de Cauchy em $[a, x_n]$, escrevemos,

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n) - f(a)}{g(x_n) - g(a)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}$$

em que $c_n \in ]a, x_n[$ (na última igualdade utilizámos (2.37)). Posto que a sucessão $(c_n)$ converge para $a$, concluímos por (2.38),

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = L\,.$$

■

Obviamente, o corolário anterior permanece válido se considerarmos os limites à esquerda do ponto $a$. Ele constitui uma versão particular de uma técnica de resolução de indeterminações que passamos a enunciar mas cuja justificação sai do âmbito deste curso.

**Teorema 2.21** *(Regra de Cauchy) Seja $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \}$, $\epsilon > 0$ . Sejam $f$ e $g$ funções contínuas à direita de $a$ e diferenciáveis em $]a, a+\epsilon[$ (se $a \in \mathbb{R}$) ou diferenciáveis em $]-\infty, -\epsilon[$ (se $a = -\infty$). Suponha que*

$$\lim_{x \to a^+(-\infty)} f(x) = \lim_{x \to a^+(-\infty)} g(x) = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ +\infty \end{array} \right. .$$

*Se existir*

$$\lim_{x \to a^+(-\infty)} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \qquad \text{em que } L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}\,,$$

*então*

$$\lim_{x \to a^+(-\infty)} \frac{f(x)}{g(x)} = L\,.$$

*O mesmo resultado vale para limites à esquerda de $a$ ($\lim_{x \to a^-} f(x)$) ou em $a = +\infty$.*

**Exemplos**

(a) Considere o limite notável

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}\,.$$

Trata-se de uma indeterminação nas condições do teorema 2.21. Temos

$$\frac{(\sin(x))'}{(x)'} = \frac{\cos(x)}{1} \to 1 \qquad \text{quando} \quad x \to 0\,,$$

pelo que reobtemos, pela regra de Cauchy, um resultado já conhecido.

(b) Considere

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} .$$

Temos

$$\frac{(e^x)'}{(x)'} = \frac{e^x}{1} \to +\infty \qquad \text{quando} \quad x \to +\infty ,$$

pelo que concluímos

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty .$$

(c) A regra de Cauchy pode ser aplicada repetidas vezes até levantar a indeterminação. Considere o limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3} .$$

Aplicando a regra de Cauchy sucessivamente,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0} -\frac{\sin(x)}{6x} = -\frac{1}{6} .$$

(d) Podemos aplicar a regra de Cauchy apenas a uma parte da expressão cujo limite estamos a calcular. Por exemplo, no caso do limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x) e^x}{\ln(1+x)(x^2+2)} ,$$

é conveniente observar que

$$\lim_{x\to 0} e^x = 1 \qquad \text{e que} \qquad \lim_{x\to 0} (x^2+2) = 2 .$$

Aplicamos por isso a regra apenas à expressão

$$\frac{\arctan(x)}{\ln(1+x)} ,$$

obtendo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x)}{\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{1+x}} = 1 .$$

Assim

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x) e^x}{\ln(1+x)(x^2+2)} = \left(\lim_{x\to 0} (x^2+2) e^x\right) \left(\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x)}{\ln(1+x)}\right) = 2 .$$

Evita-se deste modo que as expressões obtidas por derivação do nominador e do denominador se tornem demasiado complexas.

**Nota 2.18** A regra de Cauchy requer uma verificação cuidadosa da situação de indeterminação num limite. Aplicada sem critério produz provavelmente resultados errados. Considere por exemplo o limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{x}.$$

Observe que neste caso não há indeterminação. De facto

$$\lim_{x\to 0\pm} \frac{\cos(x)}{x} = \pm\infty.$$

Porém

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\cos(x))'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{1} = 0.$$

**Nota 2.19** Nem sempre a regra de Cauchy consegue esclarecer situações de indeterminação. Considere o seguinte exemplo.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x+\sin(x^2)}{x^2}.$$

Trata-se de uma indeterminação de tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Derivando nominador e denominador da expressão obtemos

$$\frac{1+2x\cos(x^2)}{2x} = \frac{1}{2x} + \cos(x^2),$$

que não tem limite em $+\infty$. Contudo, pode observar que

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x+\sin(x^2)}{x^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} + \frac{\sin(x^2)}{x^2} = 0.$$

Importa pois realçar que a regra de Cauchy é uma condição suficiente mas não necessária para a existência de limite.

**Nota 2.20** Pode por vezes a regra de Cauchy constituir uma armadilha para o utilizador azarado. Considere, por exemplo, o limite

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^{-1}}{x^{-2}}.$$

Sucessivas derivações do nominador e denominador produzem as expressões

$$\frac{x^{-2}}{2x^{-3}}, \frac{x^{-3}}{3x^{-4}}, \ldots\ldots$$

permanecendo a indeterminação em $+\infty$ em todos eles. Todavia, se observarmos que

$$\frac{x^{-1}}{x^{-2}} = x \quad \forall\, x>0,$$

não há lugar a qualquer indeterminação.

**Exercícios**

**1.** Determine o limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\sin(x)}\,.$$

**2.** Determine

$$\lim_{x\to 0} x\ln(x)\,.$$

(note que $x\ln(x) = \ln(x)/x^{-1}$)

**3.** Calcule

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)\ln(1+x)}{\sin(x)e^x}$$

tendo em conta o exemplo (d) dado no final da secção.

**4.** Calcule

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^2}\,.$$

Generalize este limite a expressões de tipo $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{p(x)}$ em que $p$ é um polinómio de grau arbitrário.

# Capítulo 3

# O Integral e suas aplicações

## 3.1 Introdução

A emancipação do pensamento científico ocorrida no Renascimento é coroada no início do século XVII pela descrição por Johannes Kepler da trajectória elíptica de Marte em torno do ponto focal ocupado pelo sol (*Astronomia Nova*, 1609). Nos *Principia Mathematica* (1687), Isaac Newton demonstra que as leis de Kepler que regem os movimentos planetários derivam de um mesmo princípio universal (que, diga-se de passagem, também se aplica às maçãs que caem das árvores sobre pensadores absortos):

*Num certo instante, a segunda derivada da lei de movimento de uma partícula (ou a "aceleração") é proporcional à força exercida sobre a partícula.*

A constante de proporcionalidade envolvida é a massa $m$ da partícula. O princípio enunciado por Newton também é conhecido por Lei Fundamental da Física. A força de atracção exercida entre pelo sol sobre Marte é inversamente proporcional ao quadrado da distância que os separa.

Em trajectórias rectilineas (por exemplo, um peso suspenso por uma mola oscilando na vertical) a Lei Fundamental traduz-se numa equação diferencial:

$$x''(t) = m\,F(t)\,.$$

Para determinar-mos a lei de movimento $x(t)$ devemos primeiro calcular a velocidade da partícula $x'(t)$ a partir de $x''(t)$. Este processo é designado por primitivação. Do mesmo modo, a primitivação de $x'(t)$ leva-nos a $x(t)$. Como veremos adiante, importa o conhecimento da posição e da velocidade num determinado instante $t_0$ para a determinação exacta de $x(t)$.

A primitivação requer o uso de uma tabela de derivação "ao contrário". Isto é, partindo de uma função $f$, procuramos calcular uma função $F$ tal que $F' = f$. As técnicas de primitivação são a base do Cálculo Integral, ao qual dedicamos este capítulo.

O Cálculo Integral reinventou a técnica de determinação de áreas e volumes, que desde Arquimedes não conhecera avanços significativos. A sua autoria deve ser atribuída não apenas a Newton, mas também a Leibniz. Ambos, por caminhos diferentes, acederam a este novo patamar do conhecimento. A discussão que se seguiu sobre quem era de facto o inventor do cálculo integral dividiu a comunidade científica da época e revelou-se estéril. Talvez por isso se designe o principal resultado deste capítulo por "Teorema Fundamental do Cálculo" sem referência a qualquer autor.

## 3.2 Noções de primitiva e integral indefinida

**Definição.** Seja $f$ uma função real de variável real definida num intervalo aberto $I$. Se existir uma função $F$, diferenciável em $I$, tal que

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in I\,,$$

então $f$ diz-se primitivável. A função $F$ é **uma** primitiva de $f$.

Uma função $f$ pode possuir muitas primitivas. Veja o seguinte

**Exemplo 3.1** *Seja $f(x) = \sin(x)$ definida em $\mathbb{R}$. Então $F_C(x) = C - \cos(x)$ é uma primitiva de $f$ para todo o $C \in \mathbb{R}$.*

Geralmente, se a uma certa primitiva adicionar-mos uma constante obtemos uma outra primitiva. Sejamos mais precisos:

**Lema 3.1** *Sejam $F_1$ e $F_2$ duas primitivas de $f$ num intervalo $I$. Então*

$$F_1(x) = F_2(x) + C \qquad \textit{para algum} \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

**Dem.** Considere a função auxiliar

$$H(x) = F_1(x) - F_2(x)\,.$$

Temos que $H$ é diferenciável e

$$H'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = 0 \qquad \forall x \in I\,.$$

Resulta do Teorema 2.13-(iii) que $H(x) = C$ para algum $C \in \mathbb{R}$, o que conclui a demonstração. ■

**Definição.** A família de todas as primitivas de uma função primitivável $f$ é designada por **integral indefinida** de $f$ e é representada por

$$\int f(x)\,dx.$$

Resulta do lema anterior que, dada uma função primitivável $f$ com uma primitiva $F$,

$$\int f(x)\,dx \;=\; \{F(x)+C\,:C\in\mathbb{R}\}\,.$$

Simplificadamente, escrevemos

$$\int f(x)\,dx \;=\; F(x)+C\,.$$

Formulário de integrais indefinidas

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$$
$$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x)+C$$
$$\int \cos(x)\,dx = \sin(x)+C$$
$$\int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx = \int 1+\tan^2(x)\,dx = \tan(x)+C$$
$$\int \frac{1}{\sin^2(x)}\,dx = -\cot(x)+C$$
$$\int e^x\,dx = e^x+C$$
$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|)+C$$
$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x)+C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x)+C$$
$$\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arccos(x)+C$$

O resultado seguinte é de justificação imediata se atendermos ao Lema 3.1 e às regras usuais de derivação.

**Teorema 3.2** *Sejam $f$ e $g$ funções primitiváveis num intervalo aberto $I$ com primitivas respectivas $F$ e $G$. Então as funções $f\pm g$ e $kf$ (com $k\in\mathbb{R}$) são primitiváveis e verifica-se*

$$\int f\pm g(x)\,dx = F(x)\pm G(x)+C\,,$$

$$\int kf\,dx = kF(x)+C\,.$$

**Exemplo 3.2** Dado um polinómio de grau $n$

$$p(x) = a_n x^n + (...)a_1 x + a_0$$

temos

$$\int p(x)\,dx = \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + (...) + \frac{a_1}{2}x^2 + a_0 x + C\,.$$

**Exercícios**

**1.** Determine a integral indefinida da função

$$f(x) = 1 + x + x^2\,.$$

**2.** Determine a primitiva $F$ da função

$$f(x) = \sin(x) - \cos(x)$$

verificando a condição $F(\pi/2) = 1$.

**3.** Verifique que

$$\int \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\,dx = \ln\left(K\frac{|x|}{|x+1|}\right)\,,$$

em que $K$ é uma constante positiva.

**4.** Determine uma função $H(x)$ tal que

$$H''(x) = 1 - \cos(x)\,.$$

**5.** Determine uma função $H_1(x)$ tal que

$$H''(x) = 1 - \cos(x)\,, \qquad H_1(0) = 0 = H_1(2\pi)\,.$$

## 3.3 Métodos de primitivação.

### 3.3.1 a primitiva "imediata"

Perante uma expressão a primitivar, utilizamos a designação de "primitiva imediata" quando nela reconhecemos a derivada de uma função composta (embora nem sempre esse reconhecimento seja trivial). Geralmente, se a expressão a primitivar é de tipo

$$f'(u(x))u'(x)\,,$$

então, revertendo a regra da derivação composta, temos

$$\int f'(u(x))u'(x)\,dx = f(u(x)) + C \tag{3.1}$$

Vejamos alguns exemplos.

**Exemplo 3.3** Considere o problema de determinar a integral indefinida

$$\int (x^2+1)^3 2x\,dx.$$

Observe que a expressão a integrar é de tipo $f'(u(x))u'(x)$ em que

$$u(x) = x^2+1\,, \quad f'(u) = u^3 \quad \text{e} \quad u'(x) = 2x\,.$$

Assim,

$$\int (x^2+1)^3 2x\,dx = \int (u(x))^3 u'(x)\,dx = \frac{1}{4}u(x)^4 + C = \frac{1}{4}(x^2+1)^4 + C\,.$$

**Exemplo 3.4** Pretendemos agora determinar

$$\int \frac{1}{x} + 1 + x^2 + \frac{2x}{1+x^2}\,.$$

Observe que

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) + C_1 \qquad \text{e} \qquad \int (1+x^2)\,dx = x + \frac{x^3}{3} + C_2\,.$$

Por outro lado,

$$\int \frac{2x}{1+x^2} = \int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx$$

em que $u(x) = 1+x^2$. Resulta pois

$$\int \frac{2x}{1+x^2} = \ln(|1+x^2|) + C_3 = \ln(1+x^2) + C_3\,.$$

Pelo Teorema 3.2 e por regras usuais dos logaritmos, podemos concluir

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x} + 1 + x^2 + \frac{2x}{1+x^2} &= \ln(|x|) + x + x^3 + \ln(1+x^2) + C\\ &= \ln(|x+x^3|) + x + x^3 + C\,.\end{aligned}$$

Certas primitivas podem tornar-se imediatas quando multiplicadas por uma constante adequada.

**Exemplo 3.5** Considere a integral indefinida

$$\int x(x^2+1)^3\,dx\,. \tag{3.2}$$

Observe que multiplicando a expressão por 2 obtemos a primitiva do Exemplo 3.3:

$$2\int x(x^2+1)^3\,dx = \int 2x(x^2+1)^3\,dx = \frac{1}{4}(x^2+1)^4 + C\,.$$

Podemos então concluir, resolvendo a equação anterior em ordem à integral indefinida[1]

$$\int x(x^2+1)^3\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}(u(x))^4 + C\right) = \frac{1}{8}(x^2+1)^4 + C\,.$$

Alternativamente, podemos multiplicar e dividir a expressão (3.2) pela constante adequada e resolver a integral numa única linha de cálculos:

$$\int x(x^2+1)^3\,dx = \frac{1}{2}\int 2x(x^2+1)^3\,dx = \frac{1}{8}(x^2+1)^4 + C\,.$$

**Exemplo 3.6** Pretendemos calcular

$$\int \tan(x)\,dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx.$$

Observe que a expressão no segundo membro é de tipo

$$\int -\frac{u'(x)}{u(x)}\,dx \qquad \text{em que} \quad u(x) = \cos(x)\,.$$

Assim

$$\begin{aligned}\int \tan(x)\,dx &= -\int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\,dx = -\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx \\ &= -\ln(|u(x)|) + C = -\ln(|\cos(x)|) + C = \ln(|\sec(x)|) + C\,.\end{aligned}$$

**Exercícios**

[1] Por comodidade, na expressão seguinte manteremos a representação $C$ para assinalar quantidades constantes que podem, no entanto, variar de igualdade para igualdade. Assim, o facto de no último membro surgir $C$ em vez de $C/2$ não constitui uma gralha.

**1.** Calcule a integral indefinida das seguintes funções multiplicando e divindo por constantes adequadas:

$$f_1(x) = \cos(2x)\,, \quad f_2(x) = e^{3x}\,, \quad f_3(x) = \frac{x^2}{x^3+1}\,, \quad f_4(x) = \frac{1}{1+(2x)^2}\,.$$

**2.** Calcule a integral indefinida das seguintes funções:

$$g_1(x) = x\cos(x^2) + x\,, \qquad g_2(x) = x^2 e^{x^3+1} + \frac{1}{x}\,,$$
$$g_3(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)+1} - \frac{1}{\cos^2(x)}\,, \qquad g_4(x) = \frac{1}{1+2x^2} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

### 3.3.2 Por substituição.

Recordamos que se $f : I \to \mathbb{R}$ é primitivável com primitiva $F$ e se supusermos que

$$x : J \to I\,, \quad x \curvearrowright x(t)$$

uma função diferenciável (aqui $J$ e $I$ designam intervalos abertos), então pela regra da derivação composta,

$$F'(x(t)) = f(x(t))x'(t)\,.$$

Em certos casos importa observar que a expressão $f(x(t))x'(t)$ é mais facilmente primitivável na variável $t$ do que $f(x)$ na variável $x$. Veja o seguinte

**Exemplo 3.7** Considere a função

$$f(x) = \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,.$$

Tomando $x(t) = \ln(t)$ a expressão

$$f(x(t))x'(t)$$

torna-se

$$\frac{e^{\ln(t)}}{1+e^{2\ln(t)}} \cdot (\ln)'(t) = \frac{t}{1+e^{\ln(t^2)}}\frac{1}{t} = \frac{1}{1+t^2}\,.$$

A última expressão tem como primitiva o arcotangente.

O método de primitivação por substituição consiste em alterar a expressão $f(x)$ numa outra expressão fácil de primitivar. Para tal, utiliza-se "mudança de variável" $x(t)$ adequada. Sejamos mais precisos:

**Definição.** Sendo $I$ e $J$ intervalos abertos, por **mudança de variável** entendemos uma aplicação bijectiva

$$x : J \to I\,, \qquad t \curvearrowright x(t)$$

tal que $x(t)$ e a sua inversa $t(x)$ são ambas diferenciáveis nos respectivos domínios.

No exemplo 3.7 temos

$$x : ]0, +\infty[ \to \mathbb{R}\,, \qquad t \curvearrowright x(t) = \ln(t)\,.$$

Por vezes os domínios $I$ e $J$ são omitidos por não desempenharem papel relevante no cálculo da primitiva. Voltando ao exemplo anterior:

**Exemplo 3.8** Depois de termos considerado a mudança de variável $x = \ln(t)$ obtivemos

$$f(x(t))x'(t) = \frac{1}{1+t^2}\,.$$

Primitivando ambos os lados da equação obtemos

$$F(x(t)) = \arctan(t) + C\,.$$

Resta agora determinar $F(x)$. Para tal, calculamos a inversa $t(x)$. Ora

$$x(t) = \ln(t) \quad \Leftrightarrow \quad t = e^x\,.$$

Assim

$$F(x) = \arctan(t(x)) + C = \arctan(e^x) + C\,.$$

No caso anterior poderíamos ter reconhecido na função $f$ a derivada de uma composta sem recorrer à mudança de variável:

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \int \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}\,dx = \arctan(e^x) + C\,.$$

Assim a inspiração do momento pode determinar que, o que para uns é uma primitiva por substituição, para outros será uma primitiva imediata. No próximo exemplo utilizaremos o símbolo $u$ para a nova variável em vez de $t$ como no exemplo (3.7)–(3.8).

**Exemplo 3.9** Considere a integral indefinida

$$\int x\sqrt{x-1}\,dx. \tag{3.3}$$

O seu cálculo é dificultado pela expressão com radical $\sqrt{x-1}$. Presumimos que a integral seria mais fácil se nos pudéssemos "livrar" da raíz. Introduzimos por isso uma nova variável

$$u = \sqrt{x-1} \qquad \text{ou equivalentemente} \qquad x = u^2 + 1\,.$$

Neste caso

$$x'(u) = 2u \quad \text{ou, usando outra notação,} \quad \frac{dx}{du} = 2u\,.$$

Para que a primitiva seja convertida para a nova variável de integração $u$, escrevemos

$$\int (u^2+1)u\,dx = \int (u^2+1)u\,\frac{dx}{du}\,du\,.$$

Calculamos

$$\int (u^2+1)u\,\frac{dx}{du}\,du = \int (u^2+1)u\cdot 2u\,du = \int 2u^4+2u^2\,du = \frac{2}{5}u^5 + \frac{2}{3}u^3 + C\,.$$

Finalmente, restituímos à solução obtida a variável original:

$$\int x\sqrt{x-1}\,dx = \frac{2}{5}(\sqrt{x-1})^5 + \frac{2}{3}(\sqrt{x-1})^3 + C = \frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + C\,.$$

**Exemplo 3.10** Considere a integral indefinida

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx\,.$$

Operemos a substituição

$$u = \sqrt{x} \qquad \Leftrightarrow \qquad x = u^2\,.$$

Nesse caso

$$\frac{dx}{du} = 2u\,.$$

Escrevemos então

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{e^u}{u}\,\frac{dx}{du}\,du = \int \frac{e^u}{u}\,2u\,du = 2\int e^u\,du = 2e^u + C.$$

Concluímos então que

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 2e^{u(x)} + C = 2e^{\sqrt{x}} + C\,.$$

### Exercícios

**1.** Complete os cálculos intermédios:

$$\int \frac{1}{x\ln(x)}\,dx = \int \frac{1}{e^u\ln(e^u)}\,\frac{dx}{du}\,du = \ldots = \int \frac{1}{u}\,du = \ldots = \ln(|\ln(x)|) + C\,.$$

**2.** Considere a integral indefinida

$$\int e^x \cos(e^x)\,.$$

Calcule-a usando para tal a mudança de variável $e^x = u$. Indique o domínio da variável $u$. Confirme que poderíamos resovê-la através de uma primitivação imediata.

**3.** Calcule a integral indefinida

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$$

mudando para a variável $t = \sqrt{x+1}$.

**4.** Calcule a integral indefinida

$$\int x\sqrt[5]{x-1}\,dx.$$

**5.** Partindo da igualdade

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)\,,$$

calcule

$$\int \cos^2(x)\,dx\,.$$

**6.** Calcule

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx$$

usando a mudança de variável

$$x(t) = \sin(t)\,, \qquad t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\,.$$

### 3.3.3 Por partes.

Começamos por recordar que, contrariamente à soma de funções, a derivada do produto não é o produto das derivadas. Ela obedece à regra

$$(uv)' = u'v + uv'\,.$$

Assim, a primitiva do produto não é o produto das primitivas. No entanto, podemos escrever a igualdade anterior

$$u'v = (uv)' - uv'\,,$$

o que implica, do ponto de vista da primitivação,

$$\int u'v\,dx = \int (uv)'dx - \int uv'\,dx\,,$$

ou
$$\int u'v\,dx = uv - \int uv'\,dx\,.$$
O método de integração por partes justifica-se quando perante uma expressão de tipo
$$\int u'v\,dx$$
em que $u'$ é facilmente primitivável, a integral
$$\int uv'\,dx$$
é mais simples de calcular. Vejamos um exemplo.

**Exemplo 3.11** Considere
$$\int xe^x\,dx.$$
Podemos considerar que a expressão integranda é da forma $u(x)v'(x)$ em que $u(x) = x$ e $v'(x) = e^x$. Nesse caso,
$$u'(x) = 1 \quad \text{e tomamos} \quad v(x) = e^x\,.$$
Assim,
$$\int xe^x\,dx = \int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx = xe^x - \int 1.e^x\,.$$
Concluímos então que
$$\int xe^x\,dx = xe^x - e^x + C\,.$$

Importa referir que a atribuição dos "papeis" de $u$ e $v'$ determina muitas vezes o sucesso do método. Se no exemplo anterior tivéssemos optado por $u = e^x$ e $v' = x$, seríamos conduzidos a
$$\int xe^x\,dx = \frac{1}{2}x^2e^x - \int \frac{1}{2}x^2e^x\,,$$
não sendo a integral do segundo membro de trato mais fácil que a do primeiro.

**Exemplo 3.12** Considere
$$\int \ln(x)\,dx\,.$$
A expressão integranda pode ser considerada o produto da função constante igual a 1 pela função logaritmo, isto é
$$\int 1 \cdot \ln(x)\,dx\,.$$

Considerando $v' = 1$ e $u = \ln(x)$, em que $v = x$ e $u' = \frac{1}{x}$, escrevemos

$$\int 1 \cdot \ln(x)\, dx = x\ln(x) - \int x(\ln(x))'\, dx = x\ln(x) - \int x\frac{1}{x}\, dx = x\ln(x) - \int 1\, dx\,.$$

Assim

$$\int 1 \cdot \ln(x)\, dx = x\ln(x) - x + C\,.$$

**Exemplo 3.13** Considere

$$\int \arctan(x)\, dx\,.$$

Utilizando a ideia do exemplo anterior, escrevemos

$$\int 1\, \arctan(x)\, dx = x\arctan(x) - \int x(\arctan(x))'\, dx =$$

$$\arctan(x) - \int x\frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\, dx.$$

A primitiva do segundo membro é imediata (recorde o Exemplo 3.4). Concluímos

$$\int 1\, \arctan(x)\, dx = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C\,.$$

Por vezes, é necessário uma aplicação repetida do método de integração por partes. É o caso do seguinte

**Exemplo 3.14** Pretende-se calcular

$$\int e^x \cos(x)\, dx\,.$$

Escolhendo $u = \cos(x)$ e $v' = e^x$ na integração por partes, obtemos

$$\int e^x \cos(x)\, dx = e^x\cos(x) - \int e^x(-\sin(x))\, dx = e^x + \int e^x \sin(x) \tag{3.4}$$

Vamos agora reaplicar o método no cálculo da integral $\int e^x \sin(x)$. A escolha de $u$ e $v'$ já não é livre. Devemos tomar $u = \sin(x)$ e $v' = e^x$ sob pena de regressarmos ao ponto de partida, isto é, ao primeiro membro de (3.4). Obtemos então

$$\begin{aligned}
&\int e^x \cos(x)\, dx = \\
&e^x\cos(x) + \left(e^x\sin(x) - \int e^x\cos(x)\, dx\right) = \\
&e^x\cos(x) + e^x\sin(x) - \int e^x\cos(x)\, dx\,.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

ou, escrevendo numa única igualdade,

$$\int e^x \cos(x)\, dx = e^x\cos(x) + e^x\sin(x) - \int e^x\cos(x)\, dx\,.$$

Repare que se passarmos os termos com integral para o primeiro membro, obtemos

$$2\int e^x \cos(x)\, dx = e^x \cos(x) + e^x \sin(x)\,,$$

ou[2]

$$\int e^x \cos(x)\, dx = \frac{1}{2}(e^x \cos(x) + e^x \sin(x)) + C\,.$$

**Exercícios**

**1.** Complete os passos perdidos ($\Box$):

$$\int x \ln(x)\, dx = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \int \frac{x^2}{2}\Box = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{1}{2}\int \Box\, dx = \Box + C\,.$$

**2.** Calcule

$$\int x e^{2x}\, dx\,, \qquad \int x\cos(\pi x)\, dx\,.$$

**3.** Verifique, integrando por partes, que

$$\int \arcsin(x)\, dx = x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C\,.$$

**4.** Calcule

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\ln(x)\,.$$

**5.** Calcule

$$\int \sin(\ln(x))\, dx\,.$$

(Duas integrações por partes. Reveja Exemplo 3.14.)

[2]Para o sucesso surprendente desta dupla primitivação por partes contribuem as boas propriedades diferenciais das funções $u_1(x) = e^x$ e $u_2(x) = \cos(x)$. Nomeadamente,

$$u_1'(x) = u_1(x)\,, \qquad -u_2''(x) = u_2(x)\,.$$

### 3.3.4 Integração de funções racionais por integração de fracções parciais

Nesta sub-secção exemplificaremos a primitivação de funções de tipo

$$\frac{p(x)}{q(x)}$$

em que $p$ e $q$ são polinómios de coeficientes reais. Observe que se o grau do nominador $p$ fôr superior ou igual ao grau do denominador $q$, podemos sempre escrever, utilizando o algoritmo de divisão de polinómios

$$p(x) = c(x)q(x) + r(x)$$

em que $c(x)$ e $r(x)$ são polinómios e o grau de $r$ é inferior ao grau de $q$. Assim,

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\, dx = \int c(x)\, dx + \int \frac{r(x)}{q(x)}\, .$$

Observe que $\int c(x)$ é imediato pelo que, sem perda de generalidade, assumiremos que

$$\text{grau } p(x) < \text{grau } q(x)\, .$$

Iremos desenvolver exemplos em que o denominador é de grau menor ou igual a três. Começemos com

*Denominadores quadráticos com raízes reais diferenciadas*

Comecemos com o seguinte

**Exemplo 3.15** Observe que

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{\frac{1}{2}}{1+x} + \frac{\frac{1}{2}}{1-x} \tag{3.6}$$

Assim

$$\int \frac{1}{1-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\, dx = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{|1+x|}{|1-x|}\right) + C$$

Observe que no exemplo anterior a chave para a primitivação está na decomposição (3.6). De um modo geral, se $q(x)$ é um polinómio de grau dois com duas raízes distintas, i.e. se

$$q(x) = k(x-a)(x-b) \qquad a, b, k \in \mathbb{R}\, , \quad a \neq b\, ,$$

então, para certos $A, B \in \mathbb{R}$,

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{cx+d}{k(x-a)(x-b)} = \frac{1}{k}\left(\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}\right)\, .$$

A primitiva do segundo membro é imediata. A determinação de $\alpha$ e $\beta$ faz-se através da resolução de um sistema, como veremos no exemplo seguinte.

**Exemplo 3.16** Considere
$$\int \frac{x+5}{2x^2+2x-4}\,dx$$
Utilizando a fórmula resolvente, escrevemos
$$\frac{x+5}{2x^2+2x-4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{x+5}{(x-1)(x+2)}\,.$$
Pretendemos decompor a fracção integranda na forma
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{x+5}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}\right)\,. \tag{3.7}$$
Somando as fracções do segundo membro obtemos
$$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x+1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{(A+B)x+(2A-B)}{(x-1)(x+2)}\,.$$
(observe que no último membro rearrumámos o polinómio nominador na sua forma canónica). A igualdade (3.7) estará garantida se
$$(A+B)x+(2A-B) = x+5$$
ou
$$\begin{cases} A+B=1 \\ 2A-B=5 \end{cases}\,.$$
Resolvendo o sistema, obtemos $A=2$ e $B=-1$ pelo que
$$\int \frac{x+5}{2x^2+2x-4} = \frac{1}{2}\int \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{|x-1|^2}{|x+2|}\right)+C\,.$$

*Denominadores quadráticos sem raízes reais*

Começamos por recordar que todo o polinómio quadrático $q$ sem raízes reais pode ser escrito na forma
$$q(x) = k[(x-a)^2+b^2]\,.$$
Para tal utiliza-se o método da completação do quadrado que passamos a exemplificar

**Exemplo 3.17** *(Completação do quadrado num polinómio de grau 2)*
Considere o polinómio sem raízes reais
$$q(x) = x^2-4x+8\,.$$

Escrevemos

$$x^2 - 4x + 8 = (x^2 - 2 \cdot 2x + 2^2) + 8 - 2^2\,,$$

de modo a que nos parêntesis do segundo membro reconheçemos o caso notável

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2\,.$$

Assim,

$$x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 + 2^2\,.$$

(No caso do coeficiente principal $k$ do polinómio ser diferente de 1, sugerimos que começe por factorizar a expressão quadrática por $k$.)

**Exemplo 3.18** Calculemos

$$\int \frac{1}{x^2 - 4x + 8}\,dx\,.$$

Pelo exemplo anterior, escrevemos

$$\int \frac{1}{x^2 - 4x + 8}\,dx = \int \frac{1}{(x-2)^2 + 4}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{(\frac{x-2}{2})^2 + 1}\,dx\,.$$

Observe que o último membro integral é uma primitiva imediata, a menos de uma multiplicação por constante. Com efeito

$$\frac{1}{4}\int \frac{1}{(\frac{x-2}{2})^2 + 1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{2}}{(\frac{x-2}{2})^2 + 1}\,dx = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x-2}{2}\right) + C\,.$$

Operemos agora a resolução geral do caso anterior. Calculamos

$$\begin{aligned}\int \frac{cx+d}{k[(x-a)^2 + b^2]}\,dx =& \frac{1}{k}\int \frac{c(x-a) + d + ca}{[(x-a)^2 + b^2]}\,dx = \\ & \frac{c}{2k}\int \frac{2(x-a)}{[(x-a)^2 + b^2]}\,dx + \frac{d+ca}{k}\int \frac{1}{[(x-a)^2 + b^2]}\,dx\end{aligned}$$

Observe que o primeiro integral do último membro é uma primitiva imediata na forma $\int \frac{u'}{u}$. Assim

$$\int \frac{2(x-a)}{[(x-a)^2 + b^2]}\,dx = \ln\Big((x-a)^2 + b^2\Big)\,. \tag{3.8}$$

Por outro lado:

$$\int \frac{1}{[(x-a)^2 + b^2]}\,dx = \frac{1}{b^2}\int \frac{1}{\left(\frac{x-a}{b}\right)^2 + 1}\,dx = \frac{1}{b}\int \frac{\frac{1}{b}}{\left(\frac{x-a}{b}\right)^2 + 1}\,dx\,.$$

Repare que o último membro é uma primitiva imediata, a saber:

$$\frac{1}{b}\int \frac{\frac{1}{b}}{\left(\frac{x-a}{b}\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{b}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right)+C\,. \tag{3.9}$$

Por (3.8)–(3.9), conclui-se

$$\int \frac{cx+d}{k[(x-a)^2+b^2]}\,dx =$$
$$\frac{c}{2k}\ln\left((x-a)^2+b^2\right)+\frac{d+ca}{kb}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right)+C \tag{3.10}$$

*Denominadores quadráticos com uma raíz real dupla*

**Exemplo 3.19** Calculemos

$$\int \frac{x}{(x-2)^2}\,dx\,.$$

Escrevemos

$$\int \frac{x}{(x-2)^2}\,dx = \int \frac{(x-2)+2}{(x-2)^2}\,dx = \int \frac{1}{x-2}\,dx + \int \frac{2}{(x-2)^2}\,dx\,.$$

Concluímos

$$\int \frac{x}{(x-2)^2}\,dx = \ln(|x-2|) - \frac{2}{x-2}+C\,.$$

Tratemos agora o caso geral $\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$ em que $p(x)$ é um polinómio de grau menor ou igual a 1 e $q(x)$ é um polinómio quadrático com raíz dupla. Neste caso, podemos escrever

$$q(x) = k(x-a)^2\,.$$

Assim

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = \int \frac{cx+d}{k(x-a)^2}\,dx = \frac{c}{k}\int \frac{(x-a)}{(x-a)^2}\,dx + \frac{d+ca}{k}\int \frac{1}{(x-a)^2}\,dx\,.$$

Neste caso, ambos as primitivas são imediatas pelo que podemos concluir

$$\int \frac{cx+d}{k(x-a)^2}\,dx = \frac{c}{k}\ln(|x-a|) - \frac{d+ca}{k(x-a)}+C\,. \tag{3.11}$$

*Denominadores cúbicos*

Iremos aqui explicitar a decomposição de uma função racional $\frac{p(x)}{q(x)}$ em que o denominador é um polinómio de grau 3. Podemos assumir que, a menos de uma divisão de polinómios, o nominador $p(x)$ é um polinómio de grau 2. Supomos também, sem perda de generalidade do método, que $q(x)$ tem primeiro coeficiente igual a 1. Explicitamos a decomposição em quatro casos exaustivos.

**(i)** Três raízes reais distintas (ou "simples"):

$$\frac{p(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} \tag{3.12}$$

**(ii)** Uma raíz dupla:

$$\frac{p(x)}{(x-a)^2(x-c)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{x-c} \tag{3.13}$$

**(iii)** Uma raíz tripla:

$$\frac{p(x)}{(x-a)^3} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{(x-a)^3} \tag{3.14}$$

**(iv)** Uma raíz simples:

$$\frac{p(x)}{\left((x-a)^2+b^2\right)(x-c)} = \frac{Ax+B}{(x-a)^2+b^2} + \frac{C}{(x-c)} \tag{3.15}$$

Observe que os segundos membros em (i)–(iv) são expressões primitiváveis segundo os métodos explanados nesta sub-secção. Os denominadores $q(x)$ em (i)–(iv), constituem, a menos de uma multiplicação por constante, todos os casos possíveis de polinómios de grau 3. Tal como no Exemplo 3.16, a determinação das constantes $A, B, C$ deverá efectuar-se somando os segundos membros e resolvendo um sistema apropriado.

**Exemplo 3.20** Calculemos

$$\int \frac{2x+4}{x^2(x-2)}\, dx\,.$$

Utilizando (ii), escrevemos

$$\frac{2x+4}{x^2(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-2}\,.$$

Somando e rearrumando o segundo membro, obtemos:

$$\frac{2x+4}{x^2(x-2)} = \frac{(A+C)x^2+(B-2A)x-2B}{x^2(x-2)}\,,$$

pelo que deduzimos

$$\begin{cases} A + C = 0\,, \\ B - 2A = 2\,, \\ -2B = 4\,. \end{cases}$$

Deixamos agora ao cuidado do leitor interessado a conclusão do sistema e a resolução da primitiva.

**Exercícios**

**1.** Calcule as seguintes integrais indefenidas:

$$\int \frac{1}{(x+2)(x+1)}\,dx\,, \qquad \int \frac{1}{x^2 - x}\,dx\,.$$

**2.** Complete a seguinte expressão

$$x^2 + 6x + 10 = (x+3)^2 + \square\,.$$

Calcule

$$\int \frac{1}{x^2 + 6x + 10}\,dx\,.$$

**3.** Verifique que

$$\int \frac{x}{x^2 - 4x + 8}\,dx = \ln\left(\sqrt{(x-2)^2 + 4}\right) + \arctan\left(\frac{x-2}{2}\right) + C\,.$$

**4.** Verifique que

$$\int \frac{x}{(x-1)^2}\,dx = \ln(|x-1|) - \frac{1}{x-1} + C\,.$$

**5.** Calcule

$$\int \frac{1}{x^3 - x^2}\,dx\,.$$

## 3.4 O Integral de Riemann

Nesta secção vamos introduzir a noção de integral de Riemann. Ela é motivada pela ideia que a noção de área –estabelecida desde a antiguidade pré-clássica para figuras polignais– pode ser extendida a regiões delimitadas por gráficos de funções contínuas. Para tal, utilizaremos uma técnica que remonta ao método de Arquimedes para calcular a área do círculo: uma região delimitada por uma curva (não muito irregular) pode ser "aproximada" por duas famílias de polígonos simples: uma contida na região; outra contendo a região. Reduzindo a dimensão dos polígonos utilizados no recobrimento, espera-se que as áreas das respectivas figuras se aproximem por defeito e por excesso, com erros arbitrariamente pequenos, do que presumimos ser a área da região.

A teoria aqui apresentada foi consolidada por Riemann no século XIX baseando-se nas contribuições dos supracitados Arquimedes, Newton e Leibniz, entre outros.

Comecemos por rever a notação sobre somatórios. Sejam $(g_n)$ e $(f_n)$ duas sucessões de números reais. A expressão

$$\sum_{i=1}^{m} g_i$$

denota a soma finita

$$g_1 + g_2 + g_3 + ... + g_{m-1} + g_m \,.$$

Por exemplo, se considerarmos a sucessão $g_n = n^2$, temos

$$\sum_{i=1}^{5} g_i = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55 \,.$$

As seguintes propriedades dos somatórios resultam da comutatividade da soma e da propriedade distributiva. Para todo o $m \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=1}^{m} (g_i + f_i) = \sum_{i=1}^{m} g_i + \sum_{i=1}^{m} f_i \,. \tag{3.16}$$

Para qualquer constante $k \in \mathbb{R}$

$$\sum_{i=1}^{m} k g_i = k \sum_{i=1}^{m} g_i \,. \tag{3.17}$$

### 3.4.1 Definição e propriedades

Introduzimos agora a noção de partição de um intervalo. Seja $[a, b]$ um intervalo fechado. Designamos por partição $P$ um conjunto finito de pontos

$$P := \{x_i\} \qquad i = 0, ..., n \,,$$

tais que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b \,.$$

Designa-se por diâmetro da partição o valor

$$\delta_P = \max\{|x_{i+1} - x_i| : i = 0, ..., n-1\} \,.$$

Dadas duas partições $P_1$, $P_2$ tais que

$$P_1 \subset P_2 \,,$$

diremos que $P_2$ é mais fina do que $P_1$. Assim, se considerar-mos as seguintes partições do intervalo $[0, 1]$

$$P_1 = \left\{0, \frac{3}{4}, 1\right\} \quad \text{e} \quad P_2 = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\},$$

temos que $P_2$ é mais fina do que $P_1$ e

$$\delta_{P_1} = \frac{3}{4}, \quad \delta_{P_2} = \frac{1}{4}.$$

Se considerar-mos uma função $f$ definida em $[a, b]$, limitada, e uma partição $P$ definimos por *soma superior de Darboux de $f$ associada a $P$* o somatório

$$\overline{S}(f, P) := \sum_{i=0}^{n-1} \sup_{[x_i, x_{i+1}]} f \cdot (x_{i+1} - x_i). \tag{3.18}$$

De forma semelhante se define *soma inferior de Darboux de $f$ associada a $P$*

$$\underline{S}(f, P) := \sum_{i=0}^{n-1} \inf_{[x_i, x_{i+1}]} f \cdot (x_{i+1} - x_i). \tag{3.19}$$

A hipótese de $f$ ser limitada garante que

$$\inf_{[x_i, x_{i+1}]} f \quad \text{e} \quad \sup_{[x_i, x_{i+1}]} f,$$

são números reais. Quando $f$ é não-negativa, as somas superior e inferior de Darboux aproximam respectivamente por excesso e por defeito a área do gráfico de uma função $f$ utilizando a área de gráficos de barras. Designamaremos por $\mathfrak{P}([a, b])$ a família de todas as partições de $[a, b]$.

Vamos estabelecer algumas propriedades simples das somas de Darboux.

**Proposição 3.3** *Sejam $P_1$, $P_2$ duas quaisquer partições de $[a, b]$ e $f$ uma função limitada. Temos*

$$\underline{S}(f, P_1) \leq \overline{S}(f, P_2). \tag{3.20}$$

*No caso particular de $P_2$ ser mais fina que $P_1$, i.e. $P_1 \subset P_2$, podemos afirmar*

$$\underline{S}(f, P_2) \leq \underline{S}(f, P_1) \leq \overline{S}(f, P_2) \leq \overline{S}(f, P_1). \tag{3.21}$$

**Dem.**

Começaremos por justificar a desigualdade (3.21). Vamos supor o caso simples $P_2 = P_1 \cup \{m\}$ em que $m \in [a, b]$. Obviamente, se $m \in P_1$ então $P_1 = P_2$ e o resultado é imediato. Consideremos então o caso $m \notin P_1$. Necessariamente

$$m \in ]x_k, x_{k+1}[ \qquad \text{para algum} \quad x_k \in P_1.$$

Mostremos a desigualdade

$$\overline{S}(f,P_2) \le \overline{S}(f,P_1)\,.$$

Necessariamente

$$\sup_{[x_k,m]} f \le \sup_{[x_k,x_{k+1}]} f \quad \text{e} \quad \sup_{[m,x_{k+1}]} f \le \sup_{[x_k,x_{k+1}]} f\,.$$

Assim, podemos concluir

$$\begin{aligned}
&\overline{S}(f,P_2) = \\
&\sum_{i\neq k} \sup_{[x_i,x_{i+1}]} f\cdot(x_{i+1}-x_i) + \sup_{[x_k,m]} f\cdot(m-x_k) + \sup_{[m,x_{k+1}]} f\cdot(x_{k+1}-m) \le \\
&\sum_{i\neq k} \sup_{[x_i,x_{i+1}]} f\cdot(x_{i+1}-x_i) + \sup_{[x_k,x_{k+1}]} f\cdot(m-x_k) + \sup_{[x_k,x_{k+1}]} f\cdot(x_{k+1}-m) = \\
&\sum_{i\neq k} \sup_{[x_i,x_{i+1}]} f\cdot(x_{i+1}-x_i) + \sup_{[x_k,x_{k+1}]} f\cdot(x_{k+1}-x_k) = \overline{S}(f,P_1)\,.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

De um modo geral, supondo

$$P_2 = P_1 \cup \{z_1, z_2, ..., z_n\}$$

aplicando sucessivamente o resultado anterior, temos

$$\overline{S}(f,P_1) \ge \overline{S}(f,P_1\cup\{z_1\}) \ge \overline{S}(f,P_1\cup\{z_1,z_2\}) \ge ... \ge \overline{S}(f,P_2)\,.$$

De modo semelhante se demonstra

$$\underline{S}(f,P_1) \le \underline{S}(f,P_2)\,,$$

o que justifica a desigualdade (3.21). Para justificar (3.20) basta considerar uma partição auxiliar $P_3 = P_1 \cup P_2$, simultaneamente mais fina que $P_1$ e $P_2$. Aplicando (3.21), temos então

$$\underline{S}(f,P_1) \le \underline{S}(f,P_3) \le \overline{S}(f,P_3) \le \overline{S}(f,P_2)\,.$$

■

**Definição.** Designamos por integral superior de uma função $f$ definida em $[a,b]$, limitada, o número real

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx := \inf\{\overline{S}(P,f) : P \in \mathfrak{P}([a,b])\}\,.$$

Do mesmo modo, definimos por integral inferior o número real

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx := \sup\{\underline{S}(P,f) : P \in \mathfrak{P}([a,b])\}\,.$$

Resulta da Proposição 3.3 que

$$\sup\{\underline{S}(P,f) \leq \inf\{\overline{S}(P,f) : P \in \mathfrak{P}([a,b])\} : P \in \mathfrak{P}([a,b])\},$$

ou

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx\,. \tag{3.23}$$

Uma função diz-se **integrável à Riemann** (ou, mais simplesmente, "integrável") quando

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx\,.$$

Esta igualdade corresponde à ideia intuitiva de que a área dos gráficos de barras "superiores" a $f$ aproxima-se da área dos gráficos de barras "inferiores" a $f$ quando as barras se tornam muito estreitas. Nesse caso, designamos por **integral de Riemann de $f$ em** $[a,b]$ (ou simplesmente "integral de $f$") o número

$$\int_a^b f(x)\,dx := \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx\,. \tag{3.24}$$

A integrabilidade de uma função à Riemann corresponde à ideia intuitiva de que a área dos gráficos de barras "superiores" a $f$ aproxima-se da área dos gráficos de barras "inferiores" a $f$ quando as barras se tornam muito estreitas.

Facilmente se verifica que a integrabilidade de uma função limitada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ equivale à existência de duas famílias de partições $P_n^1$ e $P_n^2$ ($n \in \mathbb{N}$) tais que

$$\lim \overline{S}(P_n^2, f) - \underline{S}(P_n^1, f) = 0\,.$$

De facto, podemos resumir esta condição. Tomando $P_n = P_n^1 \cup P_n^2$, concluímos, por (3.20) e (3.21), que

$$0 \leq \overline{S}(P_n, f) - \underline{S}(P_n, f) \leq \overline{S}(P_n^2, f) - \underline{S}(P_n^1, f) \to 0\,.$$

Daqui resulta o seguinte

**Teorema 3.4** *Seja $f[a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Então $f$ é integrável se e só se existe uma sucessão de partições $P_n$ tais que*

$$\lim \overline{S}(P_n, f) - \underline{S}(P_n, f) = 0\,. \tag{3.25}$$

**Exemplo 3.21** *(Exemplo de uma função integrável)*

Vamos considerar a função

$$f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}\,, \qquad f(x) = x\,.$$

Para mostrar que $f$ é integrável basta, pelo Teorema anterior, exibir uma família de partições $P_n$ que verifica o limite (3.25). Consideremos então

$$P_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{n-1}{n}, 1\right\}.$$

Temos

$$\overline{S}(f, P_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{n}\left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{n}.$$

Do mesmo modo

$$\underline{S}(f, P_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n}.$$

Assim

$$\overline{S}(f, P_n) - \underline{S}(f, P_n) =$$
$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n}\frac{k+1}{n} - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} = \frac{1}{n},$$

o que, por (3.25), garante a integrabilidade de $f$.

**Exemplo 3.22** *(Exemplo de uma função limitada não integrável)*
Considere a função de Dirichlet definida no intervalo $[0, 1]$ por

$$d(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ é racional} \\ 1 & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}.$$

A função $d$ não é integrável porque

$$\underline{\int_0^1} d(x)\, dx < \overline{\int_0^1} d(x)\, dx.$$

Por forma a justificarmos esta desigualdade começaremos por recordar que qualquer intervalo com interior não vazio de $\mathbb{R}$ contem números racionais e números irracionais. Assim, dada uma partição $P = \{0, x_1, ..., x_{n-1}, 1\}$ pertencente a $\mathfrak{P}([0, 1])]$ temos

$$\underline{S}(d, P) = \sum_{k=0}^{n-1} \inf_{[x_k, x_{k+1}]} d \cdot (x_{k+1} - x_k) = 0$$

uma vez que

$$\inf_{[x_k, x_{k+1}]} d = 0 \qquad \forall\, k = 0, ..., n-1$$

(qualquer intervalo $[x_k, x_{k+1}]$ contem pelo menos um racional $r_0$ pelo que $0 = d(r_0) = \inf_{[x_k, x_{k+1}]} d = 0$). Assim, como $P$ pode ser qualquer partição,

$$\underline{\int_0^1} d(x)\, dx := \sup\{\underline{S}(P, d) : P \in \mathfrak{P}([0, 1])\} = 0. \tag{3.26}$$

De modo semelhante, temos

$$\overline{S}(d,P) = \sum_{k=0}^{n-1} \sup_{[x_k,x_{k+1}]} d \cdot (x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} 1 \cdot (x_{k+1} - x_k) = 1\,,$$

uma vez que

$$\sup_{[x_k,x_{k+1}]} d = 1\,,$$

qualquer que seja o subintervalo $[x_k, x_{k+1}]$. Assim

$$\overline{\int_0^1} d(x)\,dx := \inf\{\overline{S}(P,d) : P \in \mathfrak{P}([0,1])\} = 1\,. \tag{3.27}$$

Podemos então concluir de (3.26) e (3.27) que a função de Dirichlet $d(x)$ não é integrável em $[0,1]$.

## Exercícios

**1.** Calcule

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{1}{4}(k/4)^2\,.$$

**2.** Verifique que o somatório do exercício anterior corresponde a uma soma inferior de Darboux

$$\underline{S}(f,P)\,,$$

para uma certa função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Indique $f$ e discrimine os pontos de $P$. Calcule a respectiva soma superior de Darboux.

**3.** Considere a função $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ constante, $g \equiv K$. Verifique que qualquer que seja a partição $P$

$$\underline{S}(g,P) = \overline{S}(g,P) = K(b-a)\,.$$

O que podemos concluir quanto à integrabilidade de $g$?

**4.** Considere no intervalo $[0,2]$ a função

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{se } 1 \le x \le 2 \end{cases}\,.$$

Dada uma partição $P$ de diâmetro inferior a $\delta$, justifique que

$$\underline{S}(f,P) \ge 1 - \delta\,,$$

e que

$$\overline{S}(f,P) \le 1 + \delta\,.$$

(sugere-se que analise o gráfico de $f$.) O que podemos concluir quanto a integrabilidade de $f$?

**5.** Considere a função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Considere as seguntes partições

$$P_n = \left\{ \frac{k}{n} \,:\, k = 0, 1, ..., n \right\} .$$

Verifique que

$$\underline{S}(f, P_n) = \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 .$$

Estabeleça a fórmula análoga para $\overline{S}(f, P_n)$.

**6.** Nas condições do exercício anterior, verifique que

$$\overline{S}(f, P_n) - \underline{S}(f, P_n) \leq \frac{2n+1}{n^3} .$$

O que podemos concluir?

### 3.4.2 Uma definição equivalente de Integrabilidade. Integrabilidade das funções contínuas.

No que segue será útil uma definição alternativa de integral de Riemann formulada a partir da noção de soma de Riemann. Ao aluno mais apressado recomendamos que numa primeira leitura registe os resultados desta secção e que posteriormente proceda ao estudo das demonstrações.

**Definição.** Dada uma partição

$$P \equiv \{x_0 := a\,, x_1, ..., x_{n-1},\, x_n := b\}$$

designamos por soma de Riemann o seguinte somatório:

$$S^*(f, P, x_1^*, ..., x_{n-1}^*) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k^*)(x_{k+1} - x_k)\,, \tag{3.28}$$

em que $x_k^* \in [x_k, x_{k+1}]$ $(k = 0, ..., n-1)$. Sem prejuízo, poderemos utilizar a notação abreviada

$$S^*(f, P, (x_k^*)) := S^*(f, P, x_1^*, ..., x_{n-1}^*) .$$

**Nota 3.1** Dada uma partição $P$ e uma soma de Riemann a ela associada, temos a seguinte relação com as somas inferior e superior de Darboux:

$$\underline{S}(f, P) \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k^*)(x_{k+1} - x_k) \leq \overline{S}(f, P) .$$

No caso de $f$ ser não-negativa, uma soma de Riemann calculaa a área de um gráfico de barras cuja altura, em cada sub-intervalo $[x_k, x_{k+1}]$, é intermédiária ao valor do infímo e do supremo de $f$ nesse sub-intervalo.

Diremos que as somas de Riemann de $f$ convergem para $L$ quando, para todo o erro $\epsilon > 0$, existe um distância $\delta_\epsilon > 0$ tal que, para toda a partição $P$ com diâmetro $\delta_P < \delta_\epsilon$, se verifica

$$|S^*(f, P, (x_k^*)) - L| < \epsilon\,.$$

Formalmente:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta_\epsilon : \quad \delta_P < \delta_\epsilon \;\Rightarrow\; |S^*(f, P, (x_k^*)) - L| < \epsilon\;. \tag{3.29}$$

Resumiremos a propriedade (3.29) na fórmula

$$\lim_{\delta_P \to 0} S^*(f, P) = L\,.$$

Temos a seguinte caracterização alternativa das funções integráveis à Riemann.

**Teorema 3.5** *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Então $f$ é integrável à Riemann se e só se é verificada a propriedade (3.29). Nesse caso, temos*

$$\int_a^b f(x)\,dx = L = \lim_{\delta_P \to 0} S^*(f, P)\,. \tag{3.30}$$

**Dem.** Comecemos por justificar que se $f$ verifica (3.29) então $f$ é integrável à Riemann. Para tal, pretendemos garantir que qualquer que seja o valor de $\epsilon > 0$ existe uma partição $P_\epsilon$ tal que

$$\overline{S}(f, P_\epsilon) - \underline{S}(f, P_\epsilon) < \epsilon\,.$$

Por (3.29) podemos considerar $\delta$ tal que se $\delta_P < \delta$ então

$$|S^*(f, P, (x_k^*)) - L| < \frac{\epsilon}{4} \tag{3.31}$$

ou

$$|\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k^*)(x_{k+1} - x_k) - L| < \frac{\epsilon}{4}\,.$$

Sendo $P_1$ e $P_2$ duas quaisquer partições de diâmetro inferior a $\delta$, teremos necessariamente

$$|S^*(f, P_1, x_1^*, ..., x_{n-1}^*)) - S^*(f, P_2, (y_1^*, ..., y_{m-1}^*))| < \frac{\epsilon}{2}\,. \tag{3.32}$$

Fixemos então uma partição $P$ de raio $\delta_P < \delta$ de modo a que se verifique a estimativa (3.31). Podemos escolher pontos intermediários $x_k^*$ de modo a que, em cada sub-intervalo $[x_k, x_{k+1}]$, tenhamos

$$\sup_{[x_k,x_{k+1}]} f - f(x_k^*) < \frac{\epsilon}{4(b-a)}\,.$$

Assim

$$\overline{S}(f,P) - S^*(f,P,x_1^*,...,x_{n-1}^*) = \tag{3.33}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sup_{[x_k,x_{k+1}]} f - f(x_k^*)\right)(x_{k+1}-x_k) < \tag{3.34}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\epsilon}{4(b-a)}(x_{k+1}-x_k) = \frac{\epsilon}{4} \tag{3.35}$$

De forma análoga, podemos escolher pontos intermediários $y_k$ de modo a que

$$f(y_k^*) - \inf_{[x_k,x_{k+1}]} f < \frac{\epsilon}{4(b-a)}\,.$$

Por cálculos semelhantes a (3.33)–(3.35) obtemos

$$S^*(f,P,y_1^*,...,y_{n-1}^*) - \underline{S}(f,P) < \frac{\epsilon}{4}\,. \tag{3.36}$$

Assim, por (3.32), (3.35) e (3.36),

$$\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) \le \left|\overline{S}(f,P) - S^*(f,P,(x_k^*))\right| +$$
$$+ |S^*(f,P,(x_k^*)) - S^*(f,P,(y_k^*))| + |S^*(f,P,(y_k^*)) - \underline{S}(f,P)| < \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4} = \epsilon\,.$$

Concluímos pois que se $f$ verifica (3.29) então $f$ é integrável à Riemann.

Consideremos agora o caso reverso. Isto é, supondo que $f$ é integrável à Riemann, iremos concluir que $f$ verifca a propriedade (3.29). Para tal, começamos por demonstrar que, dado uma partição $P_0$ (fixa), para qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta_\epsilon$ tal que, se $P$ é uma partição de diâmetro $\delta_P$,

$$\delta_P < \delta_\epsilon \quad \Rightarrow \quad \underline{S}(f,P_0) - \epsilon < S^*(f,P,(x_k^*)) < \overline{S}(f,P_0) + \epsilon\,. \tag{3.37}$$

Supomos

$$P_0 \equiv \{z_0 := a\,, z_1\,, \dots\,, z_{n_0} := b\}\,.$$

Tomamos $M$ tal que

$$|f(x)| \le M\,, \quad \forall x \in [a,b]\,.$$

Observe que dada uma partição $P = \{x_i\}_{i=1}^m$ de diâmetro $\delta$, os pontos intermediários $z_k$ da partição $P_0$ estão enquadrados por pontos consecutivos $x_j$ e $x_{j+1}$

da partição $P$ que distam menos do que $\delta_P$ (pode fazer um esboço). Tomemos a partição refinada

$$P_1 = P_0 \cup P\,.$$

Reordenando os termos das duas sucessões, podemos denotar

$$P_1 \equiv \{y_0 := a\,, \ldots, y_{n_0+m} := b\}\,.$$

Necessariamente, por (3.21),

$$\overline{S}(f, P_1) \leq \overline{S}(f, P_0)\,. \tag{3.38}$$

Comparemos agora $\overline{S}(f, P_1)$ e $S(f, P, (x_i^*))$. Em cada subintervalo $[x_j, x_{j+1}]$ tal que $z_k \in [x_j, x_{j+1}]$ temos a seguinte estimativa

$$f(x_j^*)(x_{j+1} - x_j) \leq \sup_{[x_j, z_k]} f \cdot (z_k - x_j) + \sup_{[z_k, x_{j+1}]} f \cdot (x_{j+1} - z_k) + 2\delta M. \tag{3.39}$$

Nos demais intervalos teremos

$$f(x_j^*)(x_{j+1} - x_j) \leq \sup_{[x_j, x_{j+1}]} f \cdot (x_{j+1} - x_j)\,. \tag{3.40}$$

Adicionando agora sucessivamente os membros das inequações (3.39)–(3.40), (recordando que os termos $y_i$ ora são pontos $x_j$ de $P$, ora são pontos $z_k$ de $P_0$) obtemos

$$\sum_{j=0}^{m} f(x_j^*)(x_{i+j} - x_j) \leq \sum_{i=0}^{n_0+m} \sup_{[y_i, y_{i+1}]} f \cdot (y_{i+1} - y_i) + 2M\delta n_0\,,$$

ou

$$S(f, P, (x_k^*)) \leq \overline{S}(f, P_1) + 2M\delta n_0\,. \tag{3.41}$$

Assim, de (3.38) e (3.41), podemos concluir

$$S^*(f, P, (x_k^*)) \leq \overline{S}(f, P_0) + 2M\delta n_0\,.$$

Um argumento semelhante justifica que

$$\underline{S}(f, P_0) - 2M\delta n_0 \leq S^*(f, P, (x_k^*))\,.$$

Escolhendo agora $\delta$ tal que

$$2M\delta n_0 < \epsilon \quad \text{ou} \quad \delta < \frac{\epsilon}{2Mn_0}$$

obtemos a condição (3.37).

Repare que a condição (3.37) implica a propriedade (3.29). Com efeito, dado $\epsilon > 0$, podemos sempre tomar $P_0$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx - \epsilon < \underline{S}(f, P_0) \leq \overline{S}(f, P_0) < \int_a^b f(x)dx + \epsilon\,. \quad \text{(justifique)} \tag{3.42}$$

Tomando $\delta_\epsilon$ nas condições de (3.37), concluímos, por (3.42), que se $P$ é partição de diâmetro $\delta_P < \delta_\epsilon$, então

$$\int_a^b f(x)dx - 2\epsilon < S^*(f, P, (x_k^*)) < \int_a^b f(x)dx + 2\epsilon\,.$$

Resumindo: para qualquer $\epsilon' := 2\epsilon$ existe um $\delta_{\epsilon'} := \delta_\epsilon$ tal que

$$\delta_P < \delta_{\epsilon'} \quad \Rightarrow \quad \left| S^*(f, P, (x_k^*)) - \int_a^b f(x)\,dx \right| < \epsilon'\,,$$

o que conclui a demonstração. ■

No caso das funções contínuas num intervalo $[a, b]$, as somas superior e inferior de Darboux associadas a uma partição $P$ podem ser consideradas casos particulares de somas de Riemann. Basta para tal tomar-mos, numa soma de Riemann associada a $P$, e em acordo com o Teorema de Weierstrass (Teorema 1.17), pontos intermediários $x_k^*$ correspondendo em cada sub-intervalo $[x_k, x_{k+1}]$ a máximos e mínimos de $f$ respectivamente. Estudemos agora a relação entre continuidade e integrabilidade.

**Teorema 3.6** *Seja $f$ uma função contínua em $[a, b]$. Então $f$ é integrável em $[a, b]$.*

Antes porém de justificar-mos este resultado, demonstramos uma propriedade importante das funções contínuas num intervalo compacto designada por **continuidade uniforme**.

**Lema 3.7** *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então qualquer que seja $\epsilon > 0$, existe uma distância $\delta_\epsilon > 0$ tal que*

$$\forall x, y \in [a, b]\,, \quad |x - y| < \delta_\epsilon \;\Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon \tag{3.43}$$

**Dem.** Vamos supôr, com vista a uma absurdo, que uma certa função $f$, contínua em $[a, b]$, não goza da propriedade (3.43). Tal implica que existem $\epsilon_0 > 0$, uma sucessão $\delta_n \to 0$ e sucessões de pontos $(x_n)$ e $(y_n)$ tais que

$$|x_n - y_n| < \delta_n \quad \text{e} \tag{3.44}$$

$$|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon_0\,. \tag{3.45}$$

Posto que $(x_n)$ é limitada, podemos extrair uma subsucessão convergente –que denotaremos por $(x_{i_n})$. Necessariamente, por (3.44), a subsucessão $(y_{i_n})$ é também convergente para o mesmo limite. Teremos então, para algum $x_0 \in [a, b]$,

$$\lim x_{i_n} = x_0 = \lim y_{i_n}\,.$$

Posto que $f$ é contínua em $x_0$,

$$\lim f(x_{i_n}) = f(x_0) = \lim f(y_{i_n})\,,$$

ou

$$\lim |f(x_{i_n}) - f(y_{i_n})| = 0\,.$$

Esta igualdade está em contradição com (3.45). ∎

**Nota 3.2** Este lema afirma que no caso de uma função contínua num intervalo compacto, é possível controlar o erro $\epsilon = |f(x) - f(y)|$ mediante uma estimativa da distância $\delta = |x - y|$ que não depende dos pontos $x, y$ considerados. Repare na importância do intervalo ser compacto. Para tal, observe que a função $g(x) = 1/x$ definida em $]0, 1]$ não goza da propriedade (3.43): pontos de tipo $x_n = 1/n$ e $y_n = 1/(n+1)$ podem ser tomados arbitrariamente próximos; contudo teremos invariavelmente

$$|f(x_n) - f(y_n)| = 1\,.$$

**Demonstração do Teorema 3.6.**

Justificaremos que, dado $\epsilon > 0$, existe uma partição $P$ tal que

$$\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \epsilon\,.$$

Para tal, consideremos, para cada $n \in \mathbb{N}$, a partição $P_{n_0} = \{x_k\}_{k=0}^{n}$ tal que

$$x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}\,.$$

Repare que pontos consecutivos da partição $P_0$ se encontram a igual distância $\delta_{P_n} = (b-a)/n$. Pelo lema anterior, existe $\delta$ tal que, para $x, y \in [a, b]$

$$|x - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b-a}\,.$$

Tomemos então $n$ tal que

$$\delta_{P_n} = (b-a)/n < \delta.$$

Em cada subintervalo $[x_k, x_{k+1}]$ da partição temos

$$\sup_{[x_k,x_{k+1}]} f - \inf_{[x_k,x_{k+1}]} f = f(x_k^*) - f(y_k^*) < \frac{\epsilon}{b-a}\,,$$

em que $f(x_k^*) = \max_{[x_k,x_{k+1}]} f$ e $f(y_k^*) = \min_{[x_k,x_{k+1}]} f$. Assim

$$\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} \left( \sup_{[x_k,x_{k+1}]} f - \inf_{[x_k,x_{k+1}]} f \right)(x_{k+1} - x_k) <$$
$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\epsilon}{b-a}(x_{k+1} - x_k) = \epsilon,$$

o que conclui a demonstração. ∎

**Nota 3.3** O teorema anterior estabelece que a continuidade de uma função num intervalo compacto é condição suficiente para a sua integrabilidade à Riemann. Não é contudo uma condição necessária, como se pode depreender do exercício 4 da secção anterior. O leitor compreenderá por certo, generalizando argumentos utilizados neste exercício, que uma função $f$ definida e limitada em $[a, b]$, contínua nesse intervalo –excepto num número finito de pontos– é integrável à Riemann.

Por outro lado, no exemplo fornecido de uma função não integrável $d$ (Exemplo 3.22) observamos que $d$ não é contínua em nenhum ponto do intervalo $[a, b]$. Assim, a natureza do conjunto dos pontos em que $f$ é discontínua desempenha um papel importante na sua integrabilidade. Ao aluno interessado numa caracterização completa das funções integráveis à Riemann recomendamos o manual de Análise de Elon Lages de Lima, volume 1.

### 3.4.3 Propriedades elementares do integral de Riemann.

Iremos estabelecer algumas propriedades elementares do integral de Riemann. Começamos com o seguinte

**Teorema 3.8** *Seja $f$ e $g$ funções integráveis em $[a, b]$ e $k \in \mathbb{R}$. Então $f + g$ e $kf$ são integráveis verificando-se*

$$\textit{(i)} \int_a^b f(x) + g(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx\,. \tag{3.46}$$

$$\textit{(ii)} \int_a^b kf(x)\, dx = k \int_a^b f(x)\, dx\,. \tag{3.47}$$

**Dem.** Começemos por justificar (3.46). Utilizando a caracterização (3.29) das funções integráveis, iremos justificar que, para todo o $\epsilon > 0$, existe $\delta_\epsilon > 0$ tal que, para toda a partição $P$ com diâmetro $\delta_P < \delta_\epsilon$,

$$\left| S^*(f+g, P, (x_k^*)) - \left[ \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx \right] \right| < \epsilon\,. \tag{3.48}$$

Dada uma soma de Riemann associada a uma partição $P$, a seguinte desigualade resulta de propriedades elementares dos somatórios e do módulo:

$$\begin{aligned} &\left| S^*(f+g, P, (x_k^*)) - \left[ \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx \right] \right| \le \\ &\left| S^*(f, P, (x_k^*)) - \int_a^b f(x)\, dx \right| + \left| \int_a^b S^*(g, P, (x_k^*)) - \int_a^b g(x)\, dx \right|\,. \end{aligned} \tag{3.49}$$

Pela integrabilidade de $f$, existe $\delta_1$ tal que, se $\delta_P < \delta_1$ temos

$$\left| S^*(f, P, (x_k^*)) - \int_a^b f(x)\, dx \right| < \frac{\epsilon}{2}\,.$$

Analogamente, existe $\delta_2$ tal que, para $\delta_P < \delta_2$, se tem

$$\left| S^*(g, P, (y_k^*)) - \int_a^b g(x)\, dx \right| < \frac{\epsilon}{2}\,.$$

Assim, tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, se $P$ é tal que $\delta_P < \delta$, concluímos, por (3.49),

$$\left| S^*(f+g, P, (x_k^*)) - \left[ \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx \right] \right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon\,,$$

assim se provando (3.48) e a justificação de (i). A justificação de (ii) faz-se com argumentos semelhantes que deixaremos ao cuidado do leitor. ■

Supomos agora $f$ e $g$ funções integráveis em $[a, b]$ tais que

$$g(x) \leq f(x) \qquad \forall x \in [a, b]\,.$$

Necessariamente, para qualquer partição $P$,

$$\overline{S}(g, P) \leq \overline{S}(f, P)\,.$$

Assim

$$\int_a^b g(x)\, dx = \inf\left\{\overline{S}(g, P)\,, P \in \mathfrak{P}([a, b])\right\} \leq \inf\left\{\overline{S}(f, P)\,, P \in \mathfrak{P}([a, b])\right\} = \int_a^b f(x)\, dx\,.$$

Provámos pois o seguinte resultado:

**Teorema 3.9** *Sejam $f$ e $g$ funções integráveis em $[a, b]$ tais que $g(x) \leq f(x)$ para qualquer $x \in [a, b]$. Então*

$$\int_a^b g(x)\, dx \leq \int_a^b f(x)\, dx\,.$$

Dada uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, consideramos as funções

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \quad \text{e} \quad f^-(x) = \max\{0, -f(x)\}\,.$$

Trivialmente, para todo o $x \in [a, b]$

$$f^+(x) \geq 0\,, \quad f^-(x) \geq 0 \quad \text{e} \quad f(x) = f^+(x) - f^-(x)\,.$$

Temos o seguinte resultado:

**Lema 3.10** *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Então $f^+$, $f^-$ e $|f| = f^+ + f^-$ são integráveis.*

**Dem.** Faremos a demonstração do caso $f^+$. Os restantes casos são de simples dedução a partir deste (repare que $f^- = (-f)^+$– utilize o Teorema 3.8). Começemos por observar que, dado um subintervalo $I$ de $[a,b]$, tem-se

$$\sup_I f^+ - \inf_I f^+ \leq \sup_I f - \inf_I f\,. \tag{3.50}$$

Esta desigualdade é trivial no caso em que $f = f^+$ ou $f = f^-$. No caso complementar, temos

$$\sup_I f = \sup f^+ \quad \text{e} \quad \inf_I f = -\sup_I f^- < 0\,.$$

Assim

$$\sup_I f^+ - \inf_I f^+ \leq \sup_I f^+ \leq \sup_I f^+ + \sup_I f^- = \sup_I f - \inf_I f\,,$$

o que justifica (3.50). Repare que, dada uma partição $P = \{x_k\}$, temos, por (3.50),

$$\overline{S}(f^+,P) - \underline{S}(f^+,P) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\sup_{[x_k,x_{k+1}]} f^+ - \inf_{[x_k,x_{k+1}]} f^+\right)(x_{k+1}-x_k) \leq$$
$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sup_{[x_k,x_{k+1}]} f - \inf_{[x_k,x_{k+1}]} f\right)(x_{k+1}-x_k) = \overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P)\,. \tag{3.51}$$

Posto que $f$ é integrável, tomemos uma sucessão de partições $P_n$ tais que

$$\overline{S}(f,P_n) - \underline{S}(f,P_n) \to 0\,.$$

Resulta então de (3.51) que

$$0 \leq \overline{S}(f^+,P_n) - \underline{S}(f^+,P_n) \leq \overline{S}(f,P_n) - \underline{S}(f,P_n) \to 0\,.$$

Concluímos que $f^+$ é integrável assim terminando a demonstração. ∎

**Nota 3.4** Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Designamos por área da região delimitada pelo gráfico de uma função $f$ e pelo eixo das abcissas o valor

$$\int_a^b |f(x)|\,dx.$$

No caso uma região delimitada por gráficos de funções $f$ e $g$ integráveis em $[a,b]$, definimos a sua área como sendo

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx\,.$$

**Teorema 3.11** *Seja $f$ integrável em $[a,b]$. Então $|f|$ é integrável em $[a,b]$ e*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \tag{3.52}$$

**Dem.** Temos

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \quad \forall x \in [a,b]\,.$$

Resulta então do Lema 3.10 e do Teorema 3.9 que

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx\,,$$

o que equivale a

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx\,.$$

■

**Lema 3.12** *Seja $f$ é uma função integrável em $[a,b]$. Então $f$ é integrável em qualquer subintervalo $[c,d] \subset [a,b]$*

**Dem.** Faremos uma demonstração resumida deste resultado deixando ao leitor interessado a tarefe de completar as justificações. Tomemos uma sucessão de partições $P_n$ de $[a,b]$ tais que

$$\lim \overline{S}(f,P_n) - \underline{S}(f,P_n) = 0\,.$$

Sem perda de generalidade, podemos supôr que $c,d \in P_n$ para todo o $n \in \mathbb{N}$. Consideremos agora as partições do intervalo $[c,d]$ definidas por

$$Q_n := P_n \cap [c,d]\,.$$

Verifica-se que

$$0 \leq \overline{S}(f,Q_n) - \underline{S}(f,Q_n) \leq \overline{S}(f,P_n) - \underline{S}(f,P_n)\,.$$

Concluímos que

$$\overline{S}(f,Q_n) - \underline{S}(f,Q_n) \to 0\,.$$

Pelo Teorema 3.4, $f$ é integrável em $[c,d]$. ■

## Exercícios

**1.** Sejam $f,g$ funções integráveis em $[0,1]$ tais que

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 1 \quad \text{e} \quad \int_0^1 g(x)\,dx = -1\,.$$

Verifique que

$$\int_0^1 3f(x) - 2g(x)\,dx = 5\,.$$

Resolva a seguinte equação na incógnita $k$:

$$\int_0^1 kf(x)\,dx - k^2\int_0^1 g(x)\,dx = 0\,.$$

**2.** Justifique que
$$\int_0^1 \sqrt{x}\,dx \geq \int_0^1 x^2\,dx\,.$$

**3.** Dada uma função $f$ definida em $[a, b]$, justifique que
$$f^+(x) \cdot f^-(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b]\,.$$

**4.** Considere a função definida no intervalo $[-1, 1]$ por
$$\begin{cases} 1 & \text{se } x \in [-1, 0]\,, \\ -1 & \text{se } x \in ]0, 1]\,. \end{cases}$$

Compare
$$\left|\int_{-1}^1 f(x)\,dx\right| \quad \text{e} \quad \int_{-1}^1 |f(x)|\,dx\,.$$

**5.** Suponha $f, g$ integráveis em $[a, b]$ tais que $f(x) \geq g(x)$ para todo o $x \in [a, b]$. Suponha ainda que,num certo subintervalo $[c, d] \subset [a, b]$ verifica-se desigualdade
$$f(x) \geq g(x) + \epsilon \qquad \forall x \in [c, d] \quad (\epsilon > 0)\,.$$
Prove que
$$\int_c^d f(x) - g(x)\,dx \geq \epsilon(d - c)\,dx, .$$
Conclua que
$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx + \epsilon(d - c)\,.$$
Justifique que no exercício 2 a desigualdade integral é estrita.

## 3.5 O Teorema Fundamental do Cálculo

Nesta secção estabeleceremos o resultado central deste capítulo. Como aplicação imediata obteremos um método eficiente para o cálculo de áreas de regiões delimitadas por gráficos de funções primitiváveis. Começamos com a seguinte

**Definição.** Seja $f$ uma função integrável em $[a, b]$ e $c \in [a, b]$. Convencionamos
$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx\,, \tag{3.53}$$
$$\int_c^c f(x)\,dx = 0\,, \tag{3.54}$$

Apresentamos um resultado auxiliar cuja justificação é deixada ao cuidado do leitor.

**Lema 3.13** *Seja $I$ um intervalo e $f$ uma função integrável em todo o intervalo compacto contido em $I$. Dados $a, b, c \in I$, tem-se*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,. \tag{3.55}$$

A igualdade anterior deve ser interpretada de acordo com (3.53) no caso de os extremos de um integral não se encontrarem na boa ordem e de acordo com (3.54) no caso dos extremos de um integral serem coincidentes.

**Lema 3.14** *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável e $c \in [a,b]$. Então*

$$\lim_{h\to 0} \int_c^{c+h} f(x)\,dx = 0\,.$$

**Observação** No caso $c = a$ (resp. $c = b$) deve-se entender o limite anterior como sendo em $0^+$ (resp. $0^-$).

**Dem.** Repare que pelo Lema 3.12 as expressões integrais estão bem definidas para valores de $h$ pequenos em módulo. Consideramos o caso $c \in ]a,b[$ posto que o caso $c = a$ ou $c = b$ utiliza argumentos semelhantes. Posto que $f$ é limitada em $[a,b]$, temos, para algum $M > 0$

$$|f(x)| \leq M \qquad \forall\, x \in [a,b]\,.$$

Supondo $h$ tal que $0 < |h| < \min\{|c-a|, |b-c|\}$, temos, pelo Teorema 3.11,

$$\left|\int_c^{c+h} f(x)\,dx\right| \leq \int_{\min\{c,c+h\}}^{\max\{c,c+h\}} |f(x)|\,dx \leq M|h|$$

Concluímos que

$$\lim_{h\to 0} \int_c^{c+h} f(x)\,dx = 0\,.$$

■

Seja $f$ integrável em $[a,b]$ e $c \in [a,b]$. Definimos

$$F_c(x) = \int_c^x f(t)\,ft\,, \tag{3.56}$$

em que $c \in [a,b]$. Repare que pelo Lema 3.12 a função $F_c$ está bem definida.

**Lema 3.15** *A função $F_c(x)$ definida em (3.56) é contínua em $[a,b]$.*

**Dem.** Repare que dado $x \in [a,b]$, podemos escrever, para valores de $h$ tais que $x+h \in [a,b]$,

$$F_c(x+h) = \int_c^{x+h} f(t)\,dt = \int_c^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt = F(x) + \int_x^{x+h} f(t)\,dt\,.$$

Concluímos, pelo Lema 3.14, que

$$\lim_{h\to 0} F_c(x+h) = F_c(x) + \lim_{h\to 0}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = F(x)\,.$$

(o limite anterior deve ser tomado em $0^+$ ($0^-$) se $x=a$ ($x=b$). ∎

De facto, no caso da função $f$ ser contínua em $[a,b]$, a função $F_c$ goza de uma propriedade mais forte que passamos a enunciar.

**Teorema 3.16** *(Teorema Fundamental do Cálculo) Seja $f$ uma função contínua em $[a,b]$ e $c \in [a,b]$. Para cada $x \in [a,b]$ definimos*

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt\,. \tag{3.57}$$

*Então, a função $F$ é contínua em $[a,b]$, diferenciável em $]a,b[$ verificando-se*

$$F(c) = 0 \qquad F'(x) = f(x) \quad \forall x \in ]a,b[\,. \tag{3.58}$$

*Ou seja, $F$ é a primitiva de $f$ que se anula em $c$.*

**Nota 3.5** Podemos resumir o enunciado do Teorema Fundamental do Cálculo escrevendo

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)\,dt\right](x_0) = f(x_0)\,.$$

**Dem.** A continuidade de $F$ e a condição $F(c)=0$ resultam do Lema 3.15 e de (3.53). Consideremos um ponto $x_0 \in ]a,b[$ e verifiquemos que $F$ é diferenciável em $x_0$. Para tal, demonstremos a existência do limite:

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(F(x_0+h) - F(x_0)\right)\,. \tag{3.59}$$

Utilizando o Lema 3.55 podemos escrever

$$F(x_0+h) - F(x_0) = \int_c^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_c^{x_0} f(t)\,dt =$$
$$\int_c^{x_0} f(t)\,dt + \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_c^{x_0} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt\,.$$

Temos então que a existência do limite (3.59) equivale à existência do limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt}{h}. \tag{3.60}$$

Para fixar ideias, supomos $h > 0$. Por $f$ ser contínua no intervalo $[x_0, x_0 + h]$, concluímos que $f$ tem máximo $\overline{f}_h$ e mínimo $\underline{f}_h$ nesse intervalo. Podemos concluir de (3.9) que

$$\frac{h \cdot \underline{f}_h}{h} \leq \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt}{h} \leq \frac{h \cdot \overline{f}_h}{h},$$

ou

$$\underline{f}_h \leq \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt}{h} \leq \overline{f}_h. \tag{3.61}$$

[Observe que a desigualdade (3.61) também vale no caso $h < 0$. Para tal, tenha em conta (3.53) e o facto de

$$\max_{[x_0+h,x_0]}(-f) = -\min_{[x_0+h,x_0]} f \quad \text{e} \quad \min_{[x_0+h,x_0]}(-f) = -\max_{[x_0+h,x_0]} f. \quad ]$$

A continuidade de $f$ em $x_0$ implica que

$$\lim_{h\to 0} \underline{f}_h = f(x_0) = \lim_{h\to 0} \overline{f}_h. \tag{3.62}$$

Podemos concluir de (3.61)–(3.62)

$$\lim_{h\to 0} \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt}{h} = f(x_0) = F'(x_0).$$

■

**Nota 3.6** Repare que adaptando o argumento anterior, prova-se que a função $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ tem derivada lateral direita $f(a)$ no ponto $a$ e derivada lateral esquerda $f(b)$ no ponto $b$. De um modo geral, sendo $f$ uma função integrável em $[a, b]$ e $c \in [a, b]$, a continuidade à direita (à esquerda) de $f$ no ponto $c$ implicará a existência de derivada lateral à direita (à esquerda) nesse ponto com $F'(c^+) = f(c)$ ($F'(c^-) = f(c)$).

Resulta do Teorema Fundamental do Cálculo o seguinte:

**Corolário 3.17** *(regra de Barrow)*
*Seja $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ uma função contínua e seja $F : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$, diferenciável em $]a, b[$ tal que $F'(x) = f(x)$ para qualquer $x \in ]a, b[$. Então:*

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a). \tag{3.63}$$

**Dem.** Considere e função $I(x) = F(x) - F(a)$ e a função $H(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Ambas as funções são contínuas em $[a, b]$, diferenciáveis em $]a, b[$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo e pelas hipóteses sobre $F$, temos

$$H'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0\,.$$

Resulta então do Teorema 2.13 que

$$H(x) - F(x) = C \quad \forall x \in [a, b]\,,$$

para algum $C \in \mathbb{R}$. Posto que

$$H(a) = F(a) = 0$$

podemos concluir que $C = 0$ (ou $H \equiv F$), i.e.

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a) \quad \forall x \in [a, b]\,.$$

Tomando em particular $x = b$ na igualdade anterior, concluímos (3.63). ∎

**Observação** A diferença $F(b) - F(a)$ em (3.63) é representada por $[F(x)]_a^b$.

**Exemplo 3.23** Considere a função $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sin(x)\,.$$

Trata-se de uma função contínua e por isso integrável. Pretendemos determinar a área $A$ delimitada pelo gráfico de $f$ e pelo eixo das abcissas. Calculamos pois

$$A = \int_0^{2\pi} |\sin(x)|\,dx\,.$$

Tendo em conta a decomposição da função módulo por ramos, escrevemos

$$A = \int_0^{\pi} \sin(x)\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin(x))\,dx.$$

Observe que esta decomposição permite o aplicação da Regra de Barrow a cada um dos integrais posto que as funções integrandas são primitivas imediatas. Temos então:

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx = [-\cos(x)]_0^{\pi} = -(-1) + 1 = 2\,.$$

Análogamente

$$\int_{\pi}^{2\pi} (-\sin(x))\,dx = 2\,.$$

Concluímos que $A = 4$.

**Exemplo 3.24** Pretende-se calcular a área $A$ do domínio plano delimitado pela condição

$$x^2 \leq y \leq x + 6\,.$$

Começemos por observar que a região em causa tem como fronteira superior uma secção da recta $y = x + 6$ e como fronteira inferior o arco da parábola $y = x^2$. Importa pois determinar os pontos em que ocorre a intersecçaõ dos dois gráficos. Para tal resolvemos a equação

$$x + 6 = x^2 \quad \text{ou} \quad x^2 - x - 6 = 0\,.$$

A fórmula resolvente permite determinar as duas soluções $x = -2$ e $x = 3$ correspondentes às abcissas dos dois pontos de intersecção. A área $A$ pode pois ser calculada integrando a diferença $h(x) = x + 6 - x^2$ no intervalo $[-2, 3]$ ou seja

$$A = \int_{-2}^{3} x + 6 - x^2\, dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + 6x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^{3}\,.$$

**Exemplo 3.25** Considere o quadrado unitário em $\mathbb{R}^2$ com vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ e $(0,1)$. As curvas $y = \sqrt{x}$ e $y = x^2$ dividem o quadrado em três regiões distintas. Verifiquemos que a área de cada região é de $\frac{1}{3}$.

Designando por $A_1$ a área delimitada por $y = x^2$ e pelo eixo das abcissas, temos

$$A_1 = \int_0^1 x^2\, dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}1^3 - \frac{1}{3}0^3 = \frac{1}{3}\,.$$

Recordando que, para $x \in [0,1]$ se tem $\sqrt{x} \geq x^2$, a área $A_2$ delimitada por $y = \sqrt{x}$ e $y = x^2$ é dada por

$$A_2 = \int_0^1 |\sqrt{x} - x^2|\, dx = \int_0^1 \sqrt{x} - x^2\, dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\,.$$

Finalmente,calculamos a área $A_3$ delimitada pela função constante igual a 1 (a aresta superior do quadrado) e por $y = \sqrt{x}$:

$$A_3 = \int_0^1 |1 - \sqrt{x}|\, dx = \left[x - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}\,.$$

Observe que poderíamos ter deduzido estas três áreas apenas com o cálculo de $A_1$. Com efeito, posto que $y = \sqrt{x}$ é uma curva simétrica a $y = x^2$ em relação à primeira bissectriz (tratam-se de gráficos de funções inversas), é forçoso que $A_1 = A_2 = \frac{1}{3}$. Por outro lado, posto que

$$1 = A_1 + A_2 + A_3$$

concluímos $A_3 = 1 - \frac{2}{3}$.

**Exemplo 3.26** Supondo $f$ contínua em $[0,+\infty[$, consideremos a função

$$H(x) = \int_0^{x^2} f(t)\,dt\,.$$

A função $H$ é diferenciável posto que

$$H = F(x^2) \quad \text{em que} \quad F(y) = \int_0^y f(t)\,dt\,.$$

Assim

$$H'(x) = F'(x^2)2x = f(x^2)2x\,.$$

De um modo geral, seja $I$ um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $I$. Seja $g$ diferenciável num ponto $x$ tal que $g([x-\epsilon, x+\epsilon]) \subset I$ para algum $\epsilon > 0$. Então, para qualquer $c \in I$ a função

$$H(x) = \int_c^{g(x)} f(t)\,dt,$$

é diferenciável em $x$ e

$$H'(x) = f(g(x))g'(x)\,.$$

**Exemplo 3.27** Consideremos a função definida em $]0,+\infty[$ por

$$H(x) = \int_0^{\ln(x)} e^{t^2}\,dt\,.$$

Podemos escrever $H(x) = F(g(x))$ em que

$$g(x) = \ln(x) \quad \text{e} \quad F(y) = \int_0^y e^{t^2}\,dt\,.$$

A função $g$ é diferenciável em $]0,+\infty[$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, a função $F$ é diferenciável em $\mathbb{R}$ e

$$F'(y) = e^{y^2}\,.$$

Concluímos que $H$ é diferenciável no seu domínio e

$$H'(x) = F'(g(x)) \cdot g'(x) = e^{\ln(x)^2}\frac{1}{x}\,.$$

Observe que podemos simplificar a expressão de $H'$ escrevendo

$$e^{\ln(x)^2}\frac{1}{x} = \left(e^{\ln(x)}\right)^{\ln(x)}\frac{1}{x} = x^{\ln(x)-1}\,.$$

## Exercícios

**1.** Verifique, sem recorrer ao Teorema Fundamental do Cálculo, que no caso de uma função constante $f \equiv K$ se tem

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x K\,dt\right](x_0) = K\,.$$

**2.** Utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo, justifique que

$$\int_{-a}^{a} x^2\,dx = \frac{2}{3}a^3\,.$$

**3.** Calcule a área da região delimitada pela função $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 1 - x^2$$

e o eixo das abcissas (tenha em conta que $f$ troca de sinal).

**4.** Calcule

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\,dx$$

de dois modos. Observando que se trata da área de um semi-círculo. Usando a regra de Barrow (recorde os exercícios 5 e 6 da secção 3.3.2).

**5.** Calcule

$$\int_{-1}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - x^2}\,dx\,.$$

**6.** Considere

$$F(x) = \int_0^{\sin(x^2)} \arcsin(t)\,dt.$$

Verifique que

$$F'(x) = 2x^3\cos(x^2)\,.$$

**7.** Considere a função

$$H(x) = \int_{x^2}^{x^3} \frac{1}{1+t^2}\,dt\,.$$

Mostre que

$$H(x) = \int_0^{x^3} \frac{1}{1+t^2}\,dt - \int_0^{x^2} \frac{1}{1+t^2}\,dt\,.$$

Utilizando esta igualdade, calcule $H'(x)$.

**8.** Considere a função $H$ do exercício anterior. Mostre que a equação

$$H(x) = 0$$

têm duas e só duas soluções.

## 3.6 Outros Teoremas do Cálculo Integral

Nesta secção consideraremos outros resultados relevantes no quadro do integral de Riemann.

**Teorema 3.18** *(teorema do valor médio do cálculo integral)*
*Seja $f$ uma função contínua em $[a,b]$. Então existe $c \in ]a,b[$ tal que*

$$f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{3.64}$$

**Dem.** Considere a função auxiliar

$$H(x) = f(x)(b-a) - \int_a^b f(s)\,ds\,.$$

Trata-se de uma função contínua em $[a,b]$. No caso de $f$ ser constante, temos $H \equiv 0$. Em particular concluímos (3.64). Supondo agora que $f$ não é constante, temos, para números reais $m < M$ e $x_m, x_M \in [a,b]$

$$m \leq f(x) \leq M\,, \qquad f(x_m) = m \quad \text{e} \quad f(x_M) = M\,.$$

Pelo Teorema 3.9 (utilizando as funções constantes $m$ e $M$) temos a seguinte estimativa:

$$m(b-a) = \int_a^b m\,dx < \int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b M\,dx = M(b-a)$$

(o facto das desigualdades acima serem estritas resulta de $f$ ser contínua e não constante). Assim

$$H(x_m) < 0 \qquad \text{e} \qquad H(x_M) > 0\,.$$

Resulta então do Teorema do Valor Intermediário a existência de $c$ compreendido entre $x_m$ e $x_M$ tal que $H(c) = 0$, i.e.

$$f(c)(b-a) - \int_a^b f(x)\,dx = 0\,,$$

o que equivale a (3.64). ∎

**Exercício** Justifique o Teorema 3.64 recorrendo ao Teorema do Valor Médio de Lagrange. Considere para tal a função auxiliar

$$F(x) = \int_a^x f(s)ds\,.$$

**Teorema 3.19** *(Teorema da mudança de variável no integral.)*
*Seja*

$$x(t) : [a,b] \mapsto [c,d]$$

*uma função diferenciável em* $[a,b]$ *com* $x'(t)$ *contínua em* $[a,b]$*. Seja* $f$ *uma função contínua em* $[c,d]$*. Então*

$$\int_{x(a)}^{x(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(x(t))x'(t)\,dt\,. \tag{3.65}$$

**Dem.** Pelo Teorema Fundamental do Cálculo (Teorema 3.16), podemos considerar uma primitiva $F$ de $f$. Temos então que $F(x(t))$ é uma função diferenciável em $]a,b[$ e

$$(F(x(t)))' = f(x(t))x'(t)\,.$$

Pela regra de Barrow (Corolário 3.17), podemos simultaneamente escrever

$$F(x(a)) - F(x(b)) = \int_{x(a)}^{x(b)} f(u)\,du\,,$$

$$F(x(a)) - F(x(b)) = \int_a^b (F(x(t))'\,dt = \int_a^b f(x(t))x'(t)\,dt\,.$$

O teorema resulta das igualdades anteriores. ■

**Exemplo 3.28** Pretende-se calcular o integral

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx\,.$$

Operemos a mudança de variável

$$x(t) = \sin(t) \quad \text{em que} \quad t \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]\,.$$

Neste caso

$$x'(t) = \cos(t)\,, \quad x\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\,, \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1\,.$$

Aplicando o Teorema da mudança de variável no integral,

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)\,dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,dt\,.$$

O integral após mudança de variável pode ser calculado se atendermos à seguinte fórmula trigonométrica de duplicação:

$$\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1 \quad \text{ou} \quad \cos^2(t) = \frac{1}{2}(\cos(2t)+1)\,.$$

Assim

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(\cos(2t)+1)\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin(2t)+t\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\,.$$

(Observe que o integral calculado determina a área de metade de uma calote circular.)

Finalmente, enunciamos o

**Teorema 3.20** *(Teorema de integração por partes)*
*Sejam $f$ e $g$ duas funções diferenciáveis com derivada contínua em $[a,b]$. Então*

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx. \tag{3.66}$$

O Teorema resulta directamente da fórmula de primitivação por partes. Convidamos o leitor a completar a sua justificação.

**Exemplo 3.29** Retomamos o caso do Exemplo 3.12. Pretende-se calcular

$$\int_1^e \ln(x)\,dx\,.$$

Escrevemos

$$\int_1^e \ln(x)\,dx = [x\ln(x)]_1^e - \int_1^e x\cdot\frac{1}{x} = (e\ln(e)-\ln 1) - \int_1^e 1\,dx = e-(e-1) = 1\,.$$

Apliquemos agora estes resultados ao cálculo de áreas.

**Exemplo 3.30** *(Cálculo da área de uma elipse)*
Recordamos que uma elipse pode ser caracterizada (a menos de uma translação e de uma rotação no plano) como o conjunto de pontos verificando a relação

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,, \qquad (a\geq b>0). \tag{3.67}$$

Os valores $a$ e $b$ constituem os comprimentos dos semi-eixos maior e menor respectivamente. No caso em que $a=b$ a elipse é uma circunferência de raio $a$. Se considerar-mos a secção da elipse situada no semi-plano superior $y\geq 0$ podemos re-escrever a condição (3.67)

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,.$$

Assim, a área $A'$ da semi-elipse superior pode ser calculada pela fórmula

$$A' = \int_{-a}^{a} \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx\,.$$

Observe agora que, por mudança de variável, escrevendo $x = a\sin(t)$,

$$\frac{b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{b}{a}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2-a^2\sin(t)}a\cos(t)\,dt\,,$$

ou

$$A' = ab\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(t)\,dt\,.$$

Recordando a relação $\cos^2(t) = \frac{1}{2}(1+\cos(2t))$ e integrando, obtem-se

$$A' = \frac{\pi}{2}ab\,,$$

Concluímos então que a área $A$ da elipse definida por (3.67) é

$$A = 2A' = \pi ab\,.$$

**Exemplo 3.31** Considere o domínio plano delimitado pelas condições $y = \frac{1}{x^2}$, $y = 0$, $x = 1$ e $x = n$ em que $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. A sua área $A$ pode ser determinada, em função de $n$ pela fórmula:

$$A_n = \int_1^n \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^n = 1-\frac{1}{n}\,.$$

Por outro lado, o perímetro da região, que denotamos $P_n$, pode ser estimado inferioremente pelo perímetro do trapézio com vértices nos pontos

$$(1,0) \quad (n,0) \quad (n,1/n^2) \quad (1,1)\,.$$

Assim

$$P_n \geq 1+n+\frac{1}{n^2}+\sqrt{(n-1)^2+(1-\frac{1}{n^2})}\,.$$

Observe que

$$\lim_{n\to\infty} A_n = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} P_n = \infty\,,$$

ou seja, obtemos uma família de regiões planas com áreas uniformemente limitada mas com perímetros arbitrariamente grande.

(de modo inverso, eis duas questões filosóficas: Seria possível construirmos uma família de domínios planos com perímetros uniformemente limitado e áreas arbitrariamente grandes? Existe alguma figura que maximize a área para um perímetro dado?)

## Exercícios

**1.** Justifique que existe $c \in ]0,1[$ tal que

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx = \sqrt{1+c^2}\,.$$

Deduza um enquadramento para o valor de $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$.

**2.** Efectuando a mudança de variável $x = \tan(t)$ e a relação

$$1+\tan^2(t) = \frac{1}{\cos^2(t)}\,,$$

confirme que

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\tan^2(t)} \cdot \frac{1}{\cos^2(t)}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^3(t)}\,dt\,.$$

**3.** Integrando por partes, justifique que

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^3(t)}\,dt = \sqrt{2} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2(t)}{\cos^3(t)}\,dt\,.$$

**4.** Usando o exercício anterior e uma fórmula célebre, justifique

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^3(t)}\,dt = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos(t)}dt\,.$$

**5.** Multiplicando nominador e denominador da fracção por $\cos(t)$ na fracção integranda que segue, verifique que

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos(t)}dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(t)}{1-\sin^2(t)}dt\,.$$

**6.** Justifique que

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(t)}{1-\sin^2(t)}\,dt = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{1-x^2}\,dx\,.$$

**7.** Calcule

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{1-x^2}\,dx$$

e deduza

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx\,.$$

*Se conseguiu fazer todos os exercícios anteriores, considere-se doravante um Cavaleiro Jedi do Cálculo Integral.*

# Capítulo 4

# Complementos de Derivação e Integração.

## 4.1 A fórmula de Taylor.

### 4.1.1 O polinómio de Taylor

Nesta secção abordaremos a questão da aproximação local de funções “suaves” por polinómios. Tal deve ser encarado como uma extensão da fórmula

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + r(x-a)\,, \quad \text{em que} \quad \lim_{x\to a} \frac{r(x-a)}{x-a} = 0\,,$$

válida quando a função $f$ está definida numa vizinhança de $a$ e é diferenciável nesse ponto. Neste caso, a função

$$p_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

constitui “a melhor” das aproximações lineares perto de $a$, dadas as propriedades infinitesimais do erro $|r(x-a)|$. No caso em que a função $f$ admite sucessivas derivadas até à ordem $n$ numa vizinhança de $a$ temos o seguinte resultado.

**Teorema 4.1** *(Fórmula de Taylor)*
*Seja $f$ uma função definida num intervalo aberto $I$ e seja $a \in I$. Suponha que $f$ é $(n-1)$ vezes contínuamente diferenciável em $I$ e que $f^{n-1}$ é diferenciável em $a$. Então*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + r_n(x-a) \quad (4.1)$$

*e o resto $r_n$ verifica a propriedade*

$$\lim_{x\to a} \frac{r_n(x-a)}{(x-a)^n} = 0\,. \quad (4.2)$$

**Dem.** Escrevemos

$$r_n(x-a) = f(x) - p_a(x)\,, \tag{4.3}$$

em que

$$p_a(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}}{n!}(a)(x-a)^n\,.$$

Observe que o polinómio $p_a$ goza da seguinte propriedade

$$p_a(a) = f(a)\,, \quad p_a'(a) = f'(a)\,, \quad p_a''(a) = f''(a),\ (...)\ ,p_a^{(n)} = f^{(n)}(a)\,. \tag{4.4}$$

Ou seja, o valor de $p_a$ e as suas sucessivas derivadas no ponto $a$ até à ordem $n$ coincidem, respectivamente, com o valor de $f$ e as derivadas homólogas de $f$ no mesmo ponto. Para calcular

$$\lim_{x\to a} \frac{r_n(x-a)}{(x-a)^n}$$

utilizemos a regra de Cauchy (verifique que estamos nas condições de aplicabilidade da regra). Derivando sucessivamente nominador e denominador, obtemos, a partir de (4.3),

$$\begin{aligned} \frac{r_n(x-a)}{(x-a)^n} &= \frac{f(x)-p_a(x)}{(x-a^n)}\,, \\ &\frac{f'(x)-p_a'(x)}{n(x-a)^{n-1}}\,, \\ &\frac{f''(x)-p_a''(x)}{n(n-1)(x-a)^{n-2}}\,, \\ &(...) \\ &\frac{f^{n-1}(x)-[f^{n-1}(a)+f^n(a)(x-a)]}{n!(x-a)}\,. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Repare que da hipótese de diferenciabilidade de $f^{n-1}$ em $a$ resulta que

$$\lim_{x\to a} \frac{f^{n-1}(x)-[f^{n-1}(a)+f^n(a)(x-a)]}{(x-a)} = 0\,.$$

Concluímos então, pela regra de Cauchy,

$$\lim_{x\to a} \frac{r_n(x-a)}{(x-a)^n} = (...) = \lim_{x\to a} \frac{f^{n-1}(x)-[f^{n-1}(a)+f^n(a)(x-a)]}{n!(x-a)} = 0\,.$$

■

**Nota 4.1** *(Unicidade do polinómio de Taylor)*
A condição sobre o resto

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-p_a(x)}{(x-a)^n}=0\,,$$

define o polinómio $p_a(x)$. Quer isto dizer que se $p(x)$ é um polinómio de grau $n$ tal que

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-p(x)}{(x-a)^n}=0\,,$$

é forçoso que

$$p(x)=p_a(x)\,.$$

Justifiquemos a afirmação. Necessariamente

$$\lim_{x\to a}\frac{p(x)-p_a(x)}{(x-a)^n}=\lim_{x\to a}\frac{p(x)-f(x)}{(x-a)^n}+\lim_{x\to a}\frac{f(x)-p_a(x)}{(x-a)^n}=0\,. \tag{4.6}$$

Escrevendo

$$p(x)=b_0+b_1(x-a)+b_2(x-a)^2+...+b_n(x-a)^n\,,$$

tem-se

$$\frac{p(x)-p_a(x)}{(x-a)^n}=\frac{b_0-f(a)}{(x-a)^n}+\frac{b_1-f'(a)}{(x-a)^{n-1}}+...+\left(b_n-\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\right)\,.$$

Assim, o limite (4.6) impõe

$$b_0-f(a)=0\,,\quad ...\quad,b_n-\frac{f^{(n)}(a)}{n!}=0$$

como queríamos justificar.

Este facto extende a propriedade de unicidade da recta tangente num ponto do gráfico de uma função diferenciável a uma classe de polinómios "tangentes". O polinómio $p_a(x)$ é designado **por polinómio de Taylor de grau** $n$ ou por polinómio osculador (o epíteto aqui se justificando pelas boas propriedades de aproximação local à função $f$ no ponto $a$). No caso em que $a=0$ designamos também o polinómio de Taylor por polinómio de MacLaurin

**Exemplo 4.1** *(polinómio de Maclaurin da função exponencial)*
Posto que as successivas derivadas da função $f(x)=e^x$ verificam, para todo o $n\in\mathbb{N}$ a relação

$$f^{(n)}(x)=e^x\,,$$

tem-se

$$f^{(n)}(0)=1\qquad\forall n\in\mathbb{N}\,.$$

Assim
$$p_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + .... + \frac{x^n}{n!}\,.$$
Alternativamente, escrevemos
$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + .... + \frac{x^n}{n!}\,.$$

O leitor poderá verificar a correção dos seguintes polinómios de MacLaurin:
$$\sin(x) \approx x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - .... + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}\,x^{2n-1} \qquad (n \in \mathbb{N}), \tag{4.7}$$
$$\cos(x) \approx 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - .... + \frac{(-1)^n}{(2n)!}\,x^{2n} \qquad (n \in \mathbb{N} \cup \{0\})\,. \tag{4.8}$$
$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - .... + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} \qquad (n \in \mathbb{N}). \tag{4.9}$$

Dada um polinómio $p$ convencionamos $P_n(p(x))$ o polinómio que se obtem de $p$ por eliminação dos monómios de grau estritamente maior que $n$. Por exemplo
$$P_3(1 + x + x^2 + x^3 + x^4) = 1 + x + x^2 + x^3\,.$$

O lema seguinte é um precioso auxiliar no cálculo do polinómio de Taylor da função produto $fg$ e da função composta $f \circ g$ no ponto $a$ quando são conhecidos os desevolvimentos de $f$ e $g$ nesse ponto.

**Lema 4.2** *(a) Sejam $f$ e $g$ funções definidas num intervalo aberto $I$ e seja $a \in I$. Suponha que $f$ e $g$ são $(n-1)$ vezes contínuamente diferenciável em $I$ e que $f^{n-1}$ $g^{n-1}$ são ambas diferenciáveis em $a$. Sejam $p_n$ e $q_n$ os respectivos polinómios de Taylor em $a$. Então o polinómio $P_n(p_n \cdot q_n)$ é o polinómio de Taylor de grau $n$ de $f \cdot g$ no ponto $a$.*

*(b) Seja $f$ uma função $(n-1)$ vezes contínuamente diferenciável num intervalo aberto $I$ e seja $a \in I$. Analogamente, suponha $g$ $(n-1)$ vezes contínuamente diferenciável num intervalo aberto $J$ tal que $f(a) \in J$. Também supomos que $f^{n-1}$ $g^{n-1}$ são ambas diferenciáveis em $a$ e $f(a)$ respectivamente. Sejam $p_n$ e $q_n$ os respectivos polinómios de Taylor em $a$ e $f(a)$. Então o polinómio $P_n(p_n \circ q_n)$ é o polinómio de Taylor de grau $n$ de $f \circ g$ no ponto $a$.*

**Dem.** A justificação deste lema consiste na verificação das seguintes igualdades
$$(p_n \cdot q_n)^{(j)} = (f \cdot g)^{(j)} \qquad \forall j = 0, 1, ...n$$

e

$$(p_n \circ q_n)^{(j)} = (f \circ g)^{(j)} \qquad \forall j = 0, 1, ...n \ ,$$

cujo cuidado é deixado ao leitor. Deste modo, os coeficientes dos monómios do desenvolvimento de Taylor de $fg$ e $f \circ g$ coincidem com os coeficientes hómologos dos monómios de grau menor ou igual a $n$ dos polinómios $p_n \cdot q_n$ e $p_n \circ q_n$. ■

**Exemplo 4.2** Pretendemos calcular o polinómio de macLaurin de ordem 3 da função

$$h(x) = 2\sin(x)\cos(x) \,.$$

Escrevemos

$$\sin(x) \approx x - \frac{x^3}{6} \,, \qquad \cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} \,.$$

Assim

$$h(x) \approx P_3 \left[ 2\left(x - \frac{x^3}{6}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \right] = 2P_3\left[ \left( x - \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{12} \right) \right] \,.$$

Assim, o polinómio de MacLaurin de ordem 3 de $h(x)$ é

$$p_3(x) = 2x - \frac{4}{3}x^3 \,.$$

**Exemplo 4.3** Pretendemos agora recalcular o polinómio de Taylor do exemplo anterior escrevendo

$$h(x) = \sin(2x) \,.$$

Temos, por aplicação da lei de composição

$$\sin(2x) \approx (2x) - \frac{(2x)^3}{6} = 2x - \frac{4}{3}x^3 \,.$$

**Exemplo 4.4** *(Levantamento de indeterminações em limites)*
Consideremos agora o seginte limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)(e^x - 1)}{\cos(x) - 1} \,.$$

Escrevemos

$$\sin(x)(e^x - 1) = (x - \frac{1}{6}x^3 + r_3(x))(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + r_2(x) - 1) = x^2 + r(x) \,.$$

em que, no último membro, a expressão $r(x)$ é da forma

$$r(x) = x\left( \frac{1}{2}x^2 + r_2(x) - \frac{1}{6}x^3 + r_3(x) \right) \,.$$

Em particular

$$\lim_{x\to 0} \frac{r(x)}{x^2} = 0\,.$$

Análogamente, escrevemos o denominador

$$cos(x) - 1 = 1 - x^2 + r_2(x) - 1 = -x^2 + r_2(x)\,.$$

(Abusivamente, utilizámos a expressão $r_2(x)$ para designar restos distintos que contudo, verificam $\lim_{x\to 0} r_2(x)/x^2 = 0$). Assim

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)(e^x - 1)}{\cos(x) - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + r(x)}{-x^2 + r_2(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + r(x)/x^2}{-1 + r_2(x)/x^2} = -1\,.$$

**Exercícios**

**1.** Verifique que

$$\tan(x) = x + r(x)\,.$$

em que $\lim_{x\to 0} r(x)/x = 0$. Calculando a segunda derivada da tangente no ponto 0, confirme que, de facto, se tem

$$\lim_{x\to 0} r(x)/x^2 = 0\,.$$

**2.** Verifique que

$$\arctan(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + r_4(x)$$

em que $\lim_{x\to 0} r_4(x)/x^4 = 0$.

**3.** Calcule os polinómios de Maclaurin de ordem 6 das seguintes funções

$$\cos(2x)\,; \quad \sin(x^2)\,.$$

(utilize a lei de composição).

**4.** Calcule o polinómio de MacLaurin de ordem 2 de $e^{2x}$ (ou $(e^x)^2$) de dois modos distintos: substituindo $(2x)$ num polinómio $p(x)$ conveniente; desevolvendo $(p(x))^2$.

**5.** Verique que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)\sin(2x)}{\sin(x^2)} = 2\,.$$

### 4.1.2 Representação do resto. Estimativas de erro.

Procuraremos agora obter estimativas sobre o resto $r_n(x-a)$ da fórmula de Taylor. Dito de outro modo: pretendemos controlar o erro cometido quando se utiliza o valor aproximado $p_a(x)$ em vez do valor exacto $f_a(x)$. Para tal, introduzimos a noção de **condição de Lispschitz**.

**Definição.** Seja $I$ um intervalo. Diremos que $f : I \to \mathbb{R}$ verifica a condição de Lipschitz se existir uma constante $K > 0$ tal que

$$\forall\ x, y \in I \qquad |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|\,. \tag{4.10}$$

$K$ é designada por constante de Lipschitz para a função $f$ no intervalo $I$. Repare que, caso se verifique a condição (4.10) para uma certa constante $K$, qualquer constante $K_1$ tal que $K_1 \geq K$ também é constante de Lipschitz para $f$ no intervalo $I$. As funções que verificam (4.10) são designadas por funções "lispzchitzianas em $I$".

**Exemplo 4.5** Suponha $f$ contínua em $[a, b]$, diferenciável em $]a, b[$ tal que

$$|f'(x)| \leq L\ , \quad \forall x \in ]a, b[.$$

Então $f$ verifica a condição de Lipschitz com constante $L$. Com efeito, pelo teorema do valor médio de Lagrange:

$$\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| = |f'(c)| \qquad \text{para algum} \quad c \in ]x, y[ \subset ]a, b[$$

(supusemos $x < y$). Assim

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)||x - y| \leq L|x - y| \qquad \forall\ x, y \in [a, b]\,.$$

Neste caso, determinar uma constante de Lipschitz consite em determinar um valor $L$ tal que

$$L \geq \sup_{[a,b]} |f'(x)|\,.$$

**Exemplo 4.6** Considere a função $f(x)$ definida no intervalo $[0, 1]$. Posto que

$$|f'(x)| = |2x| < 2\,, \qquad \forall x \in ]0, 1[$$

temos que $L = 2$ é uma constante de Lipschitz para $f$ em $[0, 1]$.

**Exemplo 4.7** Recordamos a seguinte propriedade dos módulos

$$|\,|x| - |y|\,| \leq |x - y|\,, \quad \forall\ x, y \in \mathbb{R}\,.$$

Concluímos que a função $f(x) = |x|$ é lipschitiziana em $\mathbb{R}$ com constante de Lipschitz $K = 1$.

Temos então o seguinte resultado que permite quantificar o erro cometido quando utilizamos o polinómio de Taylor para obter um valor aproximado de uma função $f$.

**Teorema 4.3** *Seja $f$ uma função definida num intervalo aberto $I$ e seja $a \in I$. Suponha que $f$ é $n$ vezes contínuamente diferenciável em $I$ e que $f^{(n)}$ verifica a condição de Lipschitz em $I$ com constante $L$. Então*

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{L}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}\,, \tag{4.11}$$

*em que $p_n$ é o polinómio de Taylor de grau $n$.*

**Dem.** Iremos justificar os casos $n = 1$ e $n = 2$. Os casos seguintes constituem uma adaptação simples dos argumentos que iremos utilizar. Comecemos com o caso $n = 1$. Escrevemos

$$f'(t) = f'(a) + (f'(t) - f'(a)).$$

Integrando ambos os membros da equação entre $a$ e $x \in I$ fixado, obtemos

$$\int_a^x f'(t)\,dt = \int_a^x f'(a)\,dt + \int_a^x (f'(t) - f'(a))\,dt\,. \tag{4.12}$$

Assim, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x-a) + \int_a^x (f'(t) - f'(a))\,dt\,.$$

ou

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x (f'(t) - f'(a))\,dt\,.$$

Assim se evidencia que a aproximação de $f$ pela aplicação linear $f(a)+f'(a)(x-a)$ produz um erro de

$$|r_1(x)| = \left|\int_a^x (f'(t) - f'(a))\,dt\right|\,.$$

Procuremos quantificar este erro. Supondo $x > a$, temos, por (3.11) e pela condição de Lipschitz em $L$

$$\begin{aligned}\left|\int_a^x (f'(t) - f'(a))\,dt\right| &\leq \int_a^x |f'(t) - f'(a)|\,dt \leq \\ &\int_a^x L|t-a|\,dt = \frac{L}{2}(x-a)^2\,.\end{aligned} \tag{4.13}$$

A mesma estimativa vale se tomarmos $x < a$ (atente às necessárias trocas de sinal).

Repare que no caso $n = 2$, procedendo de modo análogo a partir da igualdade

$$f''(s) = f''(a) + (f''(s) - f''(a)),$$

obteríamos, por integração entre $a$ e $t$

$$\int_a^t f''(s)\,ds = \int_a^t f''(a) + (f''(s) - f''(a))\,ds\,,$$

ou

$$f'(t) = f'(a) + f''(a)(t-a) + h_1(t)\,. \tag{4.14}$$

em que

$$h_1(t) = \int_a^t f''(s) - f''(a)\,ds$$

é uma função contínua –logo integrável– verificando, à semelhança de (4.13),

$$|h_1(t)| = \left|\int_a^t L|s-a|\,ds\right| \leq \frac{L}{2}(t-a)^2\,. \tag{4.15}$$

Assim, uma integração da igualdade (4.14) permite-nos escrever

$$f(x) = f(a) + f'(a)x + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \int_a^x h_1(t)\,dt\,,$$

em que, por (4.15),

$$\left|\int_a^x h_1(t)\,dt\right| \leq \int_a^x |h_1(t)|\,dt \leq \frac{L}{3\cdot 2}|x-a|^3 = \frac{L}{6!}|x-a|^3\,,$$

o que prova a estimativa (4.11) no caso $n = 2$. A repetição deste argumento para valores de $n$ superiores a 2 conduz-nos à maior generalidade da fórmula (4.11). ■

**Exemplo 4.8** Considere a aproximação do valor de $e^{0,1}$ fornecida pelo polinómio de Taylor de ordem 2, i.e.

$$e^1 \approx 1 + 0,1 + \frac{1}{2}(0,1)^2\,.$$

Posto qualquer derivada da função $f(x) = e^x$ é ela própria, temos que $f''$ é lipschitziana. No intervalo $[0\,;\,0,1]$ temos

$$|f''(x_1) - f''(x_2)| \leq |f'''(c)| \cdot |x_2 - x_1|\,,$$

para algum valor intermediário $c$. Posto que

$$\max_{c\in[0,0,1]} |f'''(c)| = e^{0,1}$$

podemos tomar como constante de Lipschitz $K = e^{0,1}$. Assim, pelo teorema anterior, o erro cometido pelo polinómio de Taylor de grau 2 no ponto $0,1$ verifica

$$|e^{0,1} - 1 + 0,1 + \frac{1}{2}(0,1)^2| < \frac{e^{0,1}}{3!}0,1^3\,.$$

**Exemplo 4.9** Pretendemos obter uma aproximação de $\sin(0,1)$. Temos, utilizando o polinómio de Maclaurin de grau 3

$$\sin(x) \approx x - \frac{x^3}{3!} .$$

Observe agora que, posto que

$$\sin^{(4)}(x) = \sin(x) ,$$

a terceira derivada $\sin^{(3)}(x)$ é Lipschitziana no intervalo $[0,1]$. Assim, podemos tomar a constante de Lipschitz $K = \sin(0,1)$ (porquê?). Deduzimos a estimativa

$$\left| \sin(0,1) - 0,1 - \frac{(0,1)^3}{3!} \right| \leq \frac{\sin(0,1)}{4!}(0,1)^4 \leq \frac{(0,1)^5}{4!} .$$

(recorde que $\sin(0,1) < 0,1$). De facto, o valor da aproximação está bem mais próximo do valor exacto do que o erro previsto na desigualdade anterior. Com efeito, repare que no caso da função $\sin(x)$, o polinómio de Taylor de terceiro grau e o polinómio de Taylor de quarto grau são concidentes, i.e. $p_3(x) = p_4(x)$. Tal se deve ao facto de

$$\sin^{(4)}(0) = \sin(0) = 0 .$$

Assim, tomando $K = 1$ pra constante de Lipschitz para a quarta derivada, podemos afirmar que

$$\left| \sin(0,1) - 0,1 - \frac{(0,1)^3}{3!} \right| = |\sin(0,1) - p_4(0,1)| \leq \frac{(0,1)^5}{5!} .$$

Quando dispomos de mais informação sobre a n-ésima derivada de uma função $f$, em particular se soubermos que que $f^{(n)}$ possui derivada $f^{(n+1)}$ contínua num intervalo $[a,b]$, podemos obter uma estimativa mais precisa para o resto. Retomemos a fórmula (4.12)

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x-a) + r_1(x) ,$$

em que

$$r(x) = \int_a^x (f'(t) - f'(a))\, dt .$$

Se soubermos que $f'$ é diferenciável com segunda derivada contínua, podemos escrever, para cada $t \in [a,x]$,

$$f'(t) - f'(a) = \int_a^t f''(s)\, ds .$$

Obtem-se deste modo

$$r_1(x) = \int_a^x \left( \int_a^t f''(s)\, ds \right) dx$$

Vamos supor $x > a$ (o caso reverso demonstra-se adaptando os argumentos). Afirmamos que existe $c \in [0, x]$ tal que

$$\int_a^x \left( \int_a^t f''(s)\, ds \right) dx = \frac{f''(c)}{2}(x-a)^2 \,.$$

Com efeito, supondo $m$ e $M$ respectivamente o mínimo e o máximo de $f''$ no intervalo $[a, x]$, temos

$$m(t-a)t \leq \int_a^t f''(s)\, ds \leq M(t-a) \,,$$

logo

$$\frac{m}{2}(x-a)^2 = \int_a^x mt\, dt \leq \int_a^x \left( \int_a^t f''(s)\, ds \right) \leq \int_a^x Mt\, dt = \frac{M}{2}(x-a)^2 \,. \tag{4.16}$$

Considero agora a função

$$h(y) = \int_a^x \left( \int_a^t f''(y)\, ds \right) = \frac{f''(y)}{2}(x-a)^2 \,.$$

(repare que para na expressão anterior, $f''(y)$ é uma constante). A função $h$ é contínua no intervalo $[0, x]$. Temos

$$\min_{[0,x]} h = m\frac{(x-a)^2}{2} \,, \qquad \max_{[0,x]} h = M\frac{(x-a)^2}{2} \,.$$

Por (4.16) e pelo Teorema de Bolzano (ou do Valor Intermediário) existe $c \in [0, x]$ tal que

$$h(c) := f''(c)\frac{(x-a)^2}{2} = \int_a^x \left( \int_a^t f''(s)\, ds \right) := r(x) \,.$$

O mesmo argumento pode ser adaptado para o resto de polinómios de Taylor de grau $n$ quando a função possui derivada de ordem $(n+1)$ contínua em $[0, x]$. Obtem-se assim a seguinte fórmula para o resto:

**Teorema 4.4** *(Resto de Lagrange para a Fórmula do Taylor)*

*Seja $f$ uma função definida num intervalo aberto $I$ e seja $a \in I$. Suponha que $f$ é $n+1$ vezes contínuamente diferenciável em $I$. Então*

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \,, \tag{4.17}$$

*em que $p_n$ é o polinómio de Taylor de grau $n$ e $c \in [0, x]$.*

**Nota 4.2** Uma abordagem alternativa permite justificar os seguintes factos adicionais:
(a) que a fórmula do resto permanece válida se admitirmos apenas que $f^{(n)}$ é diferenciável em $]0, x[$ e contínua em $[0, x]$;
(b) que podemos tomar o ponto intermediário $c$ no interior no intervalo $]0, x[$. Ao aluno interessado sugerimos a leitura do livor Introdução à Análise Matemática de J. Campos Ferreira.

**Nota 4.3** *Optámos nesta secção por divergir um pouco do método usual de ensino da fórmula de Taylor, nomeadamente na justificação da expressão do resto de Lagrange. Tal se deve a uma opção –obviamente criticável– do autor que ao longo dos anos de aprendizagem e ensino nunca se sentiu plenamente satisfeito com a construção da fórmula de cima para baixo (isto é, por derivações sucessivas da função $f$). Procedendo localmente a partir da derivada de ordem $n$ por integrações sucessivas, prevalece este sentimento de construímos a casa das fundações ao telhado. Ajuizará o leitor qual o melhor método.*

### Exercícios

**1.** Determine uma constante de Lipschitz para as seguinte funções no intervalo $[0, 1]$.

$$x^5\,; \quad \arctan(x)\,; \quad e^x\,; \quad \tan(2x)\,.$$

**2.** Complete

$$\int_0^1 \left( \int_0^x \left( \int_0^t s\,ds \right) dt \right) dx = \int_0^1 \left( \int_0^x t\,dt \right) dx = \square = \frac{1}{6}\,.$$

**3.** Reconhecendo em

$$1 - \frac{1}{2}x^2$$

o polinómio de MacLaurin de grau 3 da função cos, verifique que

$$|\cos(0,1) - 1 + \frac{1}{2}(0,1)^2| \leq \frac{1}{24}(0,1)^4\,.$$

**4.** Justifique que

$$\cos(0,1) - 1 + \frac{1}{2}(0,1)^2 \geq 0$$

(utilize o resto de Lagrange).

**5.** Utilizando a informação contida na Nota 4.2, confirme que a desigualdade do exercício anterior é estrita.